

532

W-47

Инженеръ-Технологъ С. П. ШЕНБЕРГЪ.

Штатный преподаватель Киевскаго Политехническаго Института
Императора Александра II.

ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

== И ==

ГИДРАВЛИЧЕСКІЯ ФРИКЦІОННЫЯ МАШИНЫ.

Въ двухъ частяхъ:

Часть I. Гидромеханика.

Часть II. Дисковыя машины.

Съ 20-ю фигурами и чертежами въ текстъ.

1665
Гидромеханика
С. Шенбергъ
И. Галуа в Киевѣ



КІЕВЪ.
Типографія „С. В. Кульженко“, Пушкинская № 4.
1915.





17

У 532 III-47

Инженеръ-Технологъ С. П. ШЕНБЕРГЪ.

Штатный преподаватель Киевскаго Политехническаго Института
Императора Александра II.

ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

== И ==

ГИДРАВЛИЧЕСКІЯ ФРИКЦІОННЫЯ МАШИНЫ.

39

1665

Университетский
Библиотека
Киев

проверено
1966 г.

Въ двухъ частяхъ:

Часть I. Гидромеханика.

Часть II. Дисковыя машины.

Съ 20-ю фигурами и чертежами въ текстѣ.



КІЕВЪ.
Типографія „С. В. Кульженко“, Пушкинская № 4.
1915.



Предисловіе.

Вопросы о вредныхъ сопротивленіяхъ и разсѣяніи энергіи, являющіеся едва ли не самыми важными въ гидравликѣ, привели авторовъ, занимающихся ими и считающихся съ современнымъ состояніемъ этого отдѣла прикладной механики, къ использованию наиболѣе сложныхъ методовъ классической гидродинамики.

Эти вопросы, ввиду нѣкоторыхъ особенностей представляемыхъ ими, наталкиваютъ на рядъ непреодолимыхъ аналитическихъ трудностей, съ которыми чистые теоретики мирятся и оставляютъ ихъ въ сторонѣ, практика же, нуждающаяся въ ихъ рѣшеніи хотя-бы съ извѣстной точностью, приходится изыскивать приближенные способы рѣшенія поставленной задачи.

Не вдаваясь въ подробности мы напомнимъ, что движеніе жидкости подчиняется двумъ режимамъ, рѣзко другъ отъ друга отличающимся. Границу между ними, какъ извѣстно, установилъ англійскій ученый O. Reynolds, доказавъ своими классическими опытами надъ теченіемъ жидкости въ трубахъ существованіе такъ называемой „критической скорости“, ниже которой теченіе жидкости „струйное“ и подчиняется основнымъ уравненіямъ Navier, а выше — наступаетъ „турбулентное“, неупорядоченное движеніе, для котораго французскій ученый Boussinesq ввелъ понятіе о „средней мѣстной скорости“ потока.

Кореннымъ отличіемъ перваго рода теченій отъ второго является зависимость потерь, при струйномъ движеніи, отъ большей или меньшей вязкости жидкости, т. е. отъ степени проявляемаго ими внутренняго и внѣшняго тренія, между тѣмъ какъ турбулентное движеніе не прямо связано съ вязкостью и проявляется въ видѣ образованія вихрей, возникающихъ тѣмъ скорѣе, чѣмъ удобоподвижнѣе частицы жидкости; кромѣ того, при турбулентномъ режимѣ значительную роль играетъ вопросъ объ устойчивости движенія жидкости. Источникомъ вихрей въ данномъ случаѣ служатъ границы, двигаясь вдоль которыхъ жидкость получаетъ вихревое движеніе, распространяющееся вглубь ея. Работы въ этомъ направленіи L. Prandtl'я, а затѣмъ и H. Blasius'a, K. Hiemenz'a, Káramán'a, H. Lorenz'a, Boltze и др. въ значительной мѣрѣ уясняютъ вопросъ.

Однако все эти авторы, решавшие вопрос о течении жидкости аналитически, исходят из основных уравнений движения, установленных Navier на основании гипотезы Newton'a о внутренних силах трения в несовершенной жидкости.

Таким образом, теория струйного движения вязкой жидкости ложится в основу всей современной технической гидромеханики, пытающейся аналитически обосновать явления турбулентного движения.

Существующие в русской научной литературе курсы гидродинамики излагают основы движения вязкой жидкости с некоторыми недочетами, не допускающими пользование изложенной теорией в чисто практических случаях. Так, почти во всех, примѣрах, иллюстрирующих применение теории, скорости принимаются настолько малыми, что произведениями и квадратами их в уравнениях движения можно пренебречь, между тем в реальных случаях практики величина скоростей не допускает пользования этими приближенными уравнениями движения.

Вопрос о силах, действующих внутри вязкой жидкости, излагается так же недостаточно полно: ограничиваются ссылкой на теорию упругости; между тем некоторые детали, как напр. вопрос о давлении, заслуживают, как нам кажется, более внимательного отношения.

Отсутствуют так же таблицы с численными значениями коэффициентов для разных жидкостей.

Имѣя ввиду указанная обстоятельства, мы решили изложить основы гидромеханики вязкой жидкости в объеме, необходимом всякому желающему в дальнейшем более подробно ознакомиться с работами, затрагивающими главным образом, техническую сторону этой области и иллюстрировать ее некоторыми примѣрами, имѣющими непосредственно прикладной характер.

Темой для примѣров избранъ вопросъ объ использовании трения жидкости какъ движущей силы или средства для ея перемѣщения. Рѣчь идетъ о машинахъ, работающих трениемъ жидкости, т. е. о „гидравлическихъ фрикціонныхъ машинахъ“, являющихся в данномъ случаѣ аналогіей обычнымъ машинамъ, работающимъ трениемъ твердыхъ тѣлъ.

Этотъ вопросъ впервые обследованъ экспериментально проф. Н. Е. Жуковскимъ на скороходной норіи (мы назвали ее „шнуровымъ насосомъ“), в которой жидкость подается шнуромъ (или цѣпью) быстро движущимся вдоль оси трубы. Результаты своихъ опытовъ проф. Н. Е. Жуковскій сообщилъ V-му водопроводному съѣзду в г. Кіевѣ в 1901 г. Впоследствии, в 1912—1913 г.г. онъ вернулся къ этой темѣ, в своемъ докладѣ XIII-му съѣзду естествоиспытателей и врачей в г. Тифлисѣ в 1913 г. подъ названіемъ: „Подача нефти помощью скороходной норіи“. Къ сожалѣнію проф. Н. Е. Жуковскій до сихъ поръ не далъ какихъ-либо теоретическихъ соображеній о результатахъ своихъ опытовъ.

Въ 1911 г. американскій физикъ N. Tesla, использовавъ ту-же идею, примѣнилъ въ качествѣ рабочаго органа не шнуръ, а вращающіеся диски и построилъ на этомъ принципѣ паровую турбину и насосъ, по характеру работы соответствующіе современной паровой турбинѣ и центробѣжному насосу; эти машины названы нами „дисковыми“.

Задачи о шнуровомъ насосѣ и его обращеніи разобрана нами до конца и рѣшены съ точки зрѣнія струйной теоріи; такъ же точно и для дисковыхъ машинъ мы указали аналитическій путь рѣшенія задачи и дали окончательный результатъ для простѣйшаго частнаго случая.

Наша работа по существу касается лишь вопроса о струйномъ теченіи жидкости, но считаясь съ значительнымъ интересомъ, представляемымъ дисковыми машинами, а также и съ тѣмъ, что отвѣчающая дѣйствительности теорія дисковыхъ машинъ строится въ предположеніи турбулентнаго движенія, мы заканчиваемъ первую часть книги небольшой главой объ этомъ движеніи, содержащей самыя необходимыя свѣдѣнія по этому вопросу.

Вторая часть работы посвящена теоретическому изслѣдованію дисковыхъ машинъ и экспериментальному изслѣдованію одного изъ видовъ дисковыхъ машинъ—дисковаго насоса. Теорія этихъ машинъ, въ предположеніи турбулентнаго движенія, данная Н. Lorenz'омъ, нами нѣсколько пополнена и исправлена; экспериментальное же изслѣдованіе дисковаго насоса, насколько намъ извѣстно, появляется въ технической литературѣ впервые.

Въ заключеніе укажемъ на нѣкоторые выводы и положенія, къ которымъ мы пришли въ нашей работѣ.

Интегралъ живыхъ силъ [(32) § 11], для неустановившагося движенія жидкости въ общемъ случаѣ, данъ съ добавочнымъ членомъ въ видѣ опредѣленнаго интеграла, зависящаго отъ скорости теченія *).

Совпаденіе главныхъ осей деформаций съ главными осями напряженій для однородной изотропной вязкой жидкости является слѣдствіемъ вывода выраженій для напряженій [(86) § 31], но не вводится какъ основная гипотеза для вывода этихъ выраженій.

Въ § 34 устанавливается понятіе объ обобщенномъ давленіи и подчеркивается существенная разница между истиннымъ гидродинамическимъ давленіемъ въ вязкой жидкости и фиктивнымъ, входящимъ въ выраженія для напряженій.

Въ § 38 данъ полный выводъ общаго выраженія для разсѣянной энергіи (114, a).

Глава X даетъ преобразование всѣхъ основныхъ формулъ и уравненій къ цилиндрическимъ координатамъ.

*) Элементарный выводъ этого интеграла, для частнаго случая, можно найти у проф. Д. П. Рузскаго: „Гидравлика“. Кіевъ, 1910 г.

Глава XI §§ 51—58 представляет полную теорию шнурового насоса и его обращения—шнурового двигателя.

В §§ 59—64 той же главы рассматривается вращательное движение вязкой жидкости между параллельными плоскостями. Приводится теоретическая схема дисковой машины и указывается путь рѣшенія задачи въ самомъ общемъ видѣ. Затѣмъ дается рѣшеніе частнаго случая. Въ §§ 65—66 рассмотренъ болѣе общій случай движенія вязкой жидкости между соосными цилиндрами.

Вторая часть работы содержитъ теоретическое и экспериментальное изслѣдованіе дисковыхъ машинъ. Во II главѣ въ § 7 показывается невозможность обоснованія теоріи на принципѣ струйнаго движенія.

Въ § 9 той же главы дается полный интеграль (12), въ Бесселевыхъ функціяхъ, основнаго уравненія (8, *b*), представляющій выраженіе для тангенціальной скорости w_t въ функціи остальныхъ параметровъ.

Въ § 14 для полной энергіи $H(r)$ на единицу вѣса, развиваемой колесомъ турбины, приведено выраженіе (37), не соответствующее данному Н. Lorenz'омъ выраженію, съ указаніемъ причинъ несовпаденія.

Глава III содержитъ опытное изслѣдованіе дисковаго насоса съ приложеніемъ всѣхъ численныхъ результатовъ.

Какъ слѣдствіе изъ опытовъ въ § 27 установлено два режима работы насоса: подчиняющійся теоретическому уравненію состоянія и отклоняющійся отъ него.

Параллельно съ этимъ дается выраженіе (62, 63) для критической скорости (v_{rk})₁, выше которой насосъ работает по теоретическому уравненію состоянія, а ниже—не удовлетворяетъ ему.

Опыты показываютъ, что дисковые насосы могутъ работать съ довольно высокимъ гидравлическимъ коэффициентомъ полезнаго дѣйствія. Въ нашемъ случаѣ, при произвольно выбранныхъ размѣрахъ насоса, онъ достигъ 0,60.

Декабрь, 1914 г.

С. Шенбергъ.

Списокъ источниковъ.

- Ahlborn, Fr. *Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes.* Hamburg, 1902.
- Appell, P. *Traité de mécanique rationnelle.* t. III, Paris, 1903.
- Астровъ, А. П. *Гидравлика.* Москва, 1911.
- Auerbach, F. *Die theoretische Hydrodynamik.* Braunschweig, 1881.
- Basset, A. B. *A treatise on hydrodynamics.* V. I a. II. Cambridge, 1888.
- Бачинскій, А. И. Изслѣдованіе о внутреннемъ треніи жидкостей. I. „Временникъ“ общ. им. X. С. Леденцова. № 3, 1913.
- Biel, R. *Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten.* Mitteil. über Forschungsarb. Н. 44.
Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren. Mitteil. über Forschungsarb. Н. 42.
- Blasius, H. *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.* Zeitschr. für Math. und Phys. V. 56, Н. 1.
Laminare Strömung in Kanälen wechselnder Breite. Zeitschr. für Math. und Phys. V. 58, Н. 3.
- Бобылевъ, Д. *Гидродинамика и теорія упругости.* Петроградъ, 1886.
Очеркъ теоріи водяныхъ теченій, выработанный Бусинекомъ. Петроградъ, 1897.
- Boltze, E. *Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.* Göttingen, 1908.
- Boulanger, A. *Hydraulique générale.* t. I et II. Paris, 1909.
- Boussinesq, J. *Essai sur la théorie des aux courantes.* Mem. prés. par div. sav. a l'Academie des sc. t. XXIII, 1877.
- Brillouin, M. *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz.* Paris, 1907.
- Couette, M. *Etudes sur le frottement des liquides.* Annal. de chim. et de phys. t. XXI, 1890.
- Détrait, M. R. *Recherches expérimentales sur le glissement des liquides a la paroi.* Journ. de Phys. 5-e série, t. III.
- Ермаковъ, В. *Общая теорія равновѣсія и колебанія упругихъ твердыхъ тѣлъ.* Кіевъ, 1871.
- Föppl, A. *Vorlesungen über technische Mechanik.* B. VI, Leipzig, 1910.

- Forschheimer, Ph. *Hydraulik*. Leipzig und Berlin, 1914.
- Förzter, E. *Vergleichende Untersuchungen von Kreiselpumpen*. Breslau, 1905.
- Gaede, W. *Die äussere Reibung der Gaze und ein neues Princip für Luftpumpen: Die Molekularluftpumpe*. Physikalische Zeitschr. Sept. № 18, 1912.
- Graetz, L. *Über die Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren*. Zeitschr. für Math. und Phys. XXV Jahr. 1880.
- Grashof, F. *Theoretische Maschinentechnik*. B. I, Leipzig, 1875.
- Grünebaum, E. *Zur Theorie der Zentrifugalpumpen*. Berlin, 1905.
- Hahn, E., Herglotz, *Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen*. G. und Schwarz- Zeitschr. für Math. und Phys. B. 51, 1904.
- Hochschild, K. *Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten*. H. v. Helmholtz v. G. holtz's Wissenschaft. Abh. B. I. Leipzig, 1882.
- Hopf, L. *Turbulenz bei einem Flusse*. Annal. der Phys. B. 32, № 9, 1910.
- Hochschild, H. *Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen*. Mitteil. über Forschungsarb., H. 112.
- Жуковский, Н. Е. *Кинематика жидкого тела*. Москва, 1876.
О трении жидкостей при большой разности скоростей ее струй. Докл. V водопр. съезду въ г. Киевѣ въ 1901 г. Москва, 1902.
- Káramán v. Th. *Über den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*. Nachr. von der königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Math.—phys. Klasse. H. 5, 1911.
- Kempf, G. *Neuere Anschauungen und Forschungen auf dem Gebiete der Schiffsschraube*. Zeitschr. für das gesamt. Turbinenwesen, №№ 10, 11, 12, 1914.
- Kirchhoff, G. *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*. Zweite Auflage. Leipzig, 1877.
- Кирпичевъ, В. Л. *Бесѣды о механикѣ*. Петроградъ, 1907.
- Klein, F. *Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten*. Zeitschr. für Math. und Phys. B. 58, H. 3.
- Куколевскій, П. *Къ исторіи центробѣжнаго насоса*. Бюллет. Политехн. Общ. № 7, 1912.
- Lamb, H. *Lehrbuch der Hydrodynamik*. N. d. 3. engl. Auflage deutsch von J. Friedel. Leipzig u. Berlin, 1907.
- Laval de, C. G. *Centrifugal pumping machinery*. New York, 1912.
- Lorenz, H. *Lehrbuch der technischen Physik. B. III. Technische Hydromechanik*. München u. Berlin, 1910.
Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder. II. Aufl. München u. Berlin, 1911.

- Turbulente Flüssigkeitsbewegungen und Strömung durch Röhren.* Abhandl. über theoretische Phys. B. I, Leipzig und Berlin, 1907.
- Theorie und Berechnung der Tesla-Kreislräder.* Zeitschr. für das ges. Turbinenwesen, №№ 6, 7, 1912.
- Theorie der Gaede-Kreislräder.* Zeitschr. für das ges. Turbinenwesen. № 12, 1912.
- Love, A. E. H. *Lehrbuch der Elasticität.* Deutsch von. A. Timpe, Leipzig u. Berlin. 1907.
- Martienssen, O. *Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes und ihre Anwendung in der Flugtechnik.* Berlin, 1913.
- Meyer, O. E. *Über Reibung der Flüssigkeiten.* Crelle's J. B. 59, 1861 u. B. 62.
- Zur Theorie der inneren Reibung.* Crelle's. J. B. 78.
- Mises, v., R. *Elemente der technischen Hydromechanik.* T. I. Leipzig u. Berlin, 1914.
- Theorie der Wasserräder.* Zeitschr. für Math. und Phys. B. 57, 1 u. 2. H. 1909.
- Navier, E. *Memoire sur les lois du mouvement des fluides.* Memoires de l'Academie des sc. t. VI.
- Петровъ, Н. *Трение въ машинахъ и вліяніе на него смазывающей жидкости.* Петроградъ, 1883.
- Практическіе результаты опытовъ и гидродинамической теоріи и т. д.* Петроградъ, 1887.
- Poiseuille. *Sur le mouvement des liquides dans les tubes capillaires.* Mem. prés par div. sav. a l'Academ. des sc. t. LX, 1842.
- Prandtl, L. *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.* Verh. des 3. intern. Mathemat. Kongress. Heidelberg, 1904.
- Prásil, F. *Technische Hydrodynamik.* Berlin, 1913.
- Reynolds, O. *An experimental Investigations of the Circumstances which determine whether the Motion of water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallele Channels.* Proceedings of the Royal Society of London. t. XXXV, 1883.
- Riemann-Weber. *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* B. I u. II, Braunschweig, 1901.
- Рузскій, Д. П. *Гидравлика.* Кіевъ, 1910.
- Саткевичъ, А. *Гидромеханика.* Петроградъ, 1904.
- Sommerfeld, A. *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung.* Atti de IV congresso internazionale dei Matematici. Roma, 1909.
- Stokes, G. G. *On the theories on the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids.* Math. and phys. papers by Stokes. V. I, Cambridge, 1880.

- Сусловъ, Г. К. *Теорія потенціала и гидродинамика*. Т. II, Кіевъ 1910.
- Тимошенко, С. П. *Курсъ теоріи упругости*. ч. I. Кіевъ, 1909.
- Voigt, W. *Kompendium der theoretischen Physik*. B. I. Leipzig, 1895.
- Wagner, P. *Strömungsenergie und mechanische Arbeit*. Berlin, 1914.
- Wagner, R. *Versuche mit Schiffschrauben und deren praktische Ergebnisse*. Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellsch. B. VII. Berlin, 1906.
- Вейнбергъ, Б. П. *Изученіе явленія въ жидкостяхъ при однородномъ сдвигъ*. Журн. русскаго физико-хим. общ. Вып. 9, 1912.
- Wien, W. *Lehrbuch der Hydrodynamik*. Leipzig, 1900.
- Winkelmann, A. *Handbuch der Physik*. Zweite Auflage. B. I, 2 Hälfte. Leipzig, 1908.
- Wetzstein, G. *Über Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz*. Ann. der Phys. und Chem. B. 68, № 7, 1899.
- Христиансенъ, С. *Основы теоретической физики*. ч. I. Петроградъ, 1895.
- Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*. B. IV, 3. Teilband. Mechanik der deformierbarer Körper.
- New invention by Tesla.*
- Tesla's new method of and apparatus for fluid propulsion.*
- The Tesla turbine.* „Electrical Review and Western Electrician“. Chicago, v. LXII, № 20; v. LIX, №№ 11, 14; 1911.
- The Tesla Steam Turbine.* „Scientific American“. v. CV, № 14, 1911.



Оглавленіе.

§§	СТРАН.
Предисловіе.	III
Списокъ источниковъ.	VII
Оглавленіе.	XI

Часть I. Гидромеханика.

Глава I.

1—5. Общія положенія. Напряженія въ сплошно-деформирующихся тѣлахъ.	1
6. Выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки сплошно-деформирующей среды.	7
7. Условіе сплошности.	9

Глава II.

8—13. Дифференціальныя уравненія движенія идеальной жидкости. Ихъ интегралы. Условія на границахъ.	11
--	----

Глава III.

14—19. Кинематика жидкаго тѣла.	21
---	----

Глава IV.

20—24. Вихревое движеніе.	30
-----------------------------------	----

Глава V.

25—26. Движеніе вязкихъ жидкостей.	36
--	----

Глава VI.

27. Связь между касательными напряжениями и деформациями 39
- 28—29. Зависимости между проекциями скоростей деформаций на оси двух систем координат. Тоже для напряжений. 42
- 30—32. Связь между напряжениями и деформациями. 45

Глава VII.

- 33—35. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости. Условия на границах. 53

Глава VIII.

- 36—39. Работа деформации сплошно-деформирующегося тела. Разсѣяніе энергии. 59

Глава IX.

- 40—42. Вихревое движение вязкой жидкости. 70

Глава X.

- 43—50. Цилиндрическія координаты. 75

Глава XI.

Приложенія предыдущей теории:

- 51—57. Шнуровой насосъ и его обращеніе. 88
58. Шнуровой двигатель. 104
- 59—66. Вращательное движение вязкой жидкости. 106

Глава XII.

- 67—72. Численныя значенія коэффициентовъ, входящихъ въ основныя уравненія. 116

Глава XIII.

- 73—80. Струйное и турбулентное движение жидкостей. 123

Часть II. Дисковые машины.

Глава I.

- 1—5. Дисковые машины Н. Тесла. Ихъ конструктивное осуществленіе. Общія соображенія. 135

Глава II.

- 6—15. Теорія дисковыхъ машинъ Н. Тесла. 140

Глава III.

- 16—27. Опытное изслѣдованіе дисковаго насоса. 156
Численные результаты опытовъ съ дисковымъ насосомъ. 175

Замѣченныя опечатки.

Часть I.

ГИДРОМЕХАНИКА.

ГИДРОМЕХАНИКА.

Глава I.

Общія положенія. Напряженія въ сплошно-деформирующихся тѣлахъ.

1. Гидромеханика исходитъ изъ слѣдующихъ основныхъ положеній:

сплошно-деформирующимся тѣломъ называется такое, въ которомъ разстояніе между двумя бесконечно близкими точками остается бесконечно-малымъ и послѣ деформациі;

жидкостью называется такое сплошно-деформирующееся тѣло, въ которомъ, въ состояніи равновѣсія, не могутъ существовать не только касательныя напряженія, но и нормальныя натяженія; послѣднія должны отсутствовать и при движеніи жидкости.

Другими словами, изъ всѣхъ жидкостей разсматриваются лишь тѣ, въ которыхъ *сцѣпленіе между частицами равно нулю*, что практически для такихъ жидкостей, какъ, напр., вода, можетъ быть принято съ большимъ приближеніемъ.

Изъ приведеннаго выше опредѣленія вытекаетъ, что въ жидкости, въ состояніи покоя, могутъ существовать лишь нормальныя давленія, т. е. такія силы, которыя стремятся измѣнить, выдѣленный въ жидкости, элементарный объемъ, сжимая его. Съ этой точки зрѣнія жидкости раздѣляются на *несжимаемая*, т. е. жидкости съ неизмѣннымъ объемомъ, а, слѣдовательно, и плотностью (капельныя, какъ ихъ иногда называютъ) и жидкости *сжимаемая* съ перемѣннымъ объемомъ и плотностью.

Что же касается касательныхъ напряженій, то здѣсь придется говорить о жидкостяхъ двоякаго рода:

1) *несжимаемая жидкости, подчиняющіяся вышеуказанному опредѣленію и обладающія тѣмъ добавочнымъ свойствомъ, что въ нихъ, и въ состояніи движенія, не существуетъ касательныхъ напряженій, называются идеальными.*

2) тѣ же жидкости, въ которыхъ при движеніи возникаютъ касательныя напряжения, называются *вязкими* жидкостями; онѣ, конечно, могутъ быть несжимаемыми и сжимаемыми.

Гидромеханика занимается только идеальными и несжимаемыми вязкими жидкостями.

2. Если въ сплошно-деформирующемся тѣлѣ, отнесенномъ къ какой-либо неподвижной прямоуглоульной системѣ координатъ X, Y, Z , выдѣлимъ элементарный параллелоипедъ объема dv съ ребрами параллельными осямъ, то на него дѣйствуютъ, въ общемъ случаѣ, силы двухъ категорій: къ первой относятся силы объемныя и силы, рассчитанныя на единицу массы; ко второй—силы, рассчитанныя на единицу поверхности.

Обозначая черезъ dP равнодѣйствующую силу, приложенныхъ къ массѣ dm разсматриваемаго элементарнаго объема (считая всѣ силы приложенными въ центрѣ тяжести этого объема), получаемъ для *силы рассчитанной на единицу массы*, приложенной въ центрѣ тяжести объема выраженіе

$$F_m = \lim_{dm \rightarrow 0} \left| \frac{dP}{dm} \cdot \dots \dots \dots \right. \quad (1)$$

Обозначая плотность въ центрѣ тяжести нашего элементарнаго объема черезъ ρ , имѣемъ

$$dm = \rho dv,$$

отсюда F_v — сила на единицу объема выразится такъ:

$$F_v = \lim_{dv \rightarrow 0} \left| \frac{dP}{dv} = \rho F_m \cdot \dots \dots \dots \right. \quad (2)$$

Послѣднее уравненіе даетъ связь между объемной силой и силой, рассчитанной на единицу массы.

На каждую грань ds со стороны жидкости, окружающей нашъ параллелоипедъ, дѣйствуютъ силы. Предполагая, что всѣ онѣ приложены въ центрѣ тяжести элементарной площадки ds , и что ихъ равнодѣйствующая равна dP_1 , имѣемъ для *поверхностной силы* такое выраженіе:

$$F_s = \lim_{ds \rightarrow 0} \left| \frac{dP_1}{ds} \cdot \dots \dots \dots \right. \quad (3)$$

Силы F_s и F_m (или F_v) по существу отличны другъ отъ друга: первая является результатомъ дѣйствія жидкости, окружающей разсматриваемый элементарный объемъ, на жидкость внутри его лежащую; вторая, т. е., F_m и F_v возникаютъ вслѣдствіе силъ, подобныхъ силѣ тяжести, магнитнымъ или электрическимъ силамъ. Сюда же должно быть причислено взаимодѣйствіе между отдѣльными частицами

жидкости, источникомъ котораго является притяженіе по закону Ньютона.

Поверхностныя и объемныя силы, вообще говоря, являются функциями координатъ точки и времени. Изъ предыдущихъ разсужденій мы видимъ, что для поверхностной силы, кромѣ координатъ точки, играетъ роль ориентировка той элементарной площадкѣ, на которую эта сила рассчитана, при чемъ для жидкостей невязкихъ сила эта, на основаніи опредѣленія, можетъ быть лишь давленіемъ (т. е. силой, направленной нормально къ площадкѣ внутрь элемента).

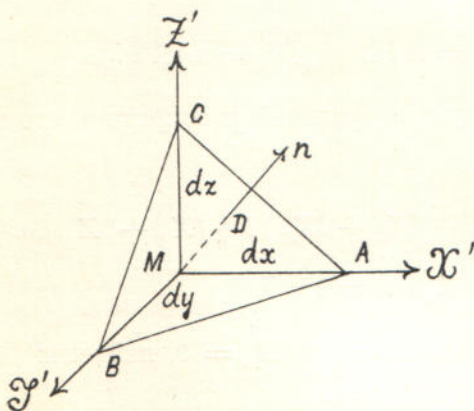
3. Въ дальнѣйшемъ мы введемъ слѣдующія обозначенія:

$$X_n, Y_n, Z_n \dots \dots \dots (4)$$

будутъ обозначать составляющія по осямъ X, Y, Z , поверхностной силы, на площадку съ нормалью n , дѣйствующей со стороны положительной нормали къ площадкѣ на сторону отрицательной. Если вмѣсто n стоитъ соотвѣтственно x, y или z , то (4) обозначаютъ составляющія поверхностной силы на площадки перпендикулярныя къ соотвѣтствующимъ осямъ; направленія положительныхъ нормалей къ нимъ совпадаютъ съ направлениемъ координатныхъ осей.

Можно показать, что *поверхностная сила*, или, какъ мы дальше будемъ говорить, *напряженіе въ данной точкѣ на какую-либо площадку съ нормалью n* , вполне опредѣляется напряжениями на три взаимно перпендикулярныя площадки, черезъ эту точку проходящія.

Для этого черезъ разсматриваемую точку M проведемъ три плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ, и плоскость, перпендикулярную къ направлению нормали n на бесконечно маломъ разстояніи отъ M (черт. 1). Получимъ тетраэдръ съ ребрами MA, MB, MC , соотвѣтственно равными dx, dy, dz . Составляющія силы на единицу массы въ точкѣ M обозначимъ черезъ:



Черт. 1.

$$X, Y, Z \dots \dots \dots (5)$$

Составляющія напряжения на площадку ABC будутъ

$$X_n + \delta X_n, Y_n + \delta Y_n, Z_n + \delta Z_n,$$

если для площадкѣ съ той же нормалью въ точкѣ M принять выраженія (4).

Обозначая площадку ΔABC через δS , высоту MD тетраэдра через δh , получимъ для объема нашего элементарнаго тетраэдра слѣдующія выражения:

$$\delta v = \frac{dx dy dz}{3} = \frac{\delta S \delta h}{3};$$

если ρ плотность въ центрѣ тяжести тетраэдра, то масса его выразится такъ:

$$\delta m = \rho \delta v = \rho \frac{dx dy dz}{3} = \rho \frac{\delta S \delta h}{3}.$$

Примѣнимъ теперь къ нашему тетраэдру принципъ Даламбера. Примемъ, что сила, дѣйствующая на грань, получается какъ произведение изъ площади грани на силу, приложенную въ центрѣ тяжести ея; аналогично для массы и объемной силы. Въ такомъ случаѣ для оси X равенство нулю потерянной силы даетъ:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta S \delta h}{3} j_x - \rho \frac{\delta S \delta h}{3} (X + \delta X) - (X_n + \delta X_n) \delta S + (X_x + \delta X_x) \frac{dy dz}{2} + \\ + (X_y + \delta X_y) \frac{dx dz}{2} + (X_z + \delta X_z) \frac{dx dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

гдѣ j_x составляющая ускоренія центра тяжести по оси X .

Если l, m, n — косинусы угловъ нормали n съ осями, то имѣютъ мѣсто равенства:

$$\frac{dy dz}{2} = l \delta S, \quad \frac{dx dz}{2} = m \delta S, \quad \frac{dx dy}{3} = n \delta S.$$

Дѣлая подстановку въ предыдущее уравненіе и сокративъ его на δS , получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \delta h j_x - \rho \delta h (X + \delta X)}{3} - X_n - \delta X_n + (X_x + \delta X_x) l + (X_y + \delta X_y) m + \\ + (X_z + \delta X_z) n = 0; \end{aligned}$$

переходя къ предѣлу, т. е. принимая $\delta h = 0$ и $\delta X_n = 0$, найдемъ:

$$X_n = X_x l + X_y m + X_z n.$$

Примѣняя тѣ же разсужденія къ осямъ Y и Z , можемъ для X_n, Y_n, Z_n написать:

$$\begin{aligned} X_n &= X_x l + X_y m + X_z n, \\ Y_n &= Y_x l + Y_y m + Y_z n, \quad \dots \dots \dots (6) \\ Z_n &= Z_x l + Z_y m + Z_z n. \end{aligned}$$

Для идеальной жидкости, на основаніи ея опредѣленія, имѣемъ:

$$X_y = X_z = Y_x = Y_z = Z_x = Z_y = 0;$$

кромѣ того, напряженіе F_s на площадку δS совпадаетъ по направленію съ нормалію n къ ней, т. е.

$$X_x = F_s l, \quad Y_y = F_s m, \quad Z_z = F_s n;$$

равенства (6) обратятся поэтому въ такіа:

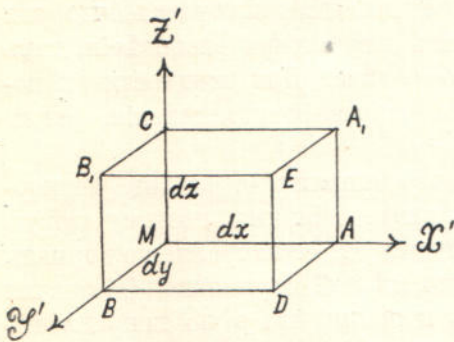
$$F_s = X_x = Y_y = Z_z = -p, \quad \dots \dots \dots (7)$$

т. е. въ идеальной жидкости напряженіе на площадку въ данной точкѣ нормально къ ней и не зависитъ отъ положенія этой площадки (т. е. направленія нормали къ ней). Это напряженіе обычно называется давленіемъ; обозначимъ его черезъ $-p$.

4. Уравненія (6) показываютъ, что напряженіе въ данной точкѣ на произвольно выбранную площадку зависитъ отъ напряженій на три взаимно перпендикулярныя площадки, черезъ эту точку проходящія. Переходъ отъ одной системы трехъ взаимно перпендикулярныхъ площадокъ къ другой, въ данной точкѣ, представляетъ простую задачу аналитической геометріи. Между составляющими этихъ напряженій существуетъ весьма простая зависимость, получающаяся примѣненіемъ закона моментовъ количествъ движенія къ элементарному параллелепипеду, грани котораго параллельны координатнымъ плоскостямъ (см. черт. 2).

Пусть въ точкѣ M на три взаимноперпендикулярныхъ площадки, параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ, дѣйствуютъ напряжения (пользуясь обозначенія 4 и 5)

$$\begin{aligned} X_x, \quad Y_x, \quad Z_x, \\ X_y, \quad Y_y, \quad Z_y, \quad \dots \dots (4, a) \\ X_z, \quad Y_z, \quad Z_z, \end{aligned}$$



Черт. 2.

а на единицу массы:

$$X, Y, Z \dots \dots \dots (5, a)$$

На площадки DAA_1E , BB_1ED , и CA_1EB_1 дѣйствуютъ напряженія

$$X_x + \delta X_x, \quad Y_x + \delta Y_x, \quad Z_x + \delta Z_x \quad \text{и т. д.},$$

причемъ поверхностныя силы приложены въ центрахъ тяжести грани параллелепипеда, а сила, дѣйствующая на массу, въ центрѣ тя-

жести самага параллелоипеда. Напишемъ уравненіе моментовъ количествъ движенія для случая вращенія нашего параллелоипеда вокругъ оси Z' , получимъ:

$$\begin{aligned} \rho \, dx \, dy \, dz \, \frac{(dx^2 + dy^2)}{12} \, \frac{d\omega}{dt} &= X_x \, \frac{dy^2 \, dz}{2} - Y_y \, \frac{dx^2 \, dz}{2} - \\ &- (X_x + \delta X_x) \, \frac{dy^2 \, dz}{2} + (Y_y + \delta Y_y) \, \frac{dx^2 \, dz}{2} + (Y_x + \delta Y_x) \, dy \, dz \, dx - \\ &- (X_y + \delta X_y) \, dz \, dx \, dy + X_z \, \frac{dy^2 \, dx}{2} - Y_z \, \frac{dx^2 \, dy}{2} - (X_z + \delta X_z) \, \frac{dy^2 \, dx}{2} + \\ &+ (Y_z + \delta Y_z) \, \frac{dx^2 \, dy}{2} + \rho \, dx \, dy \, dz \left[(Y + \delta Y) \, \frac{dx}{2} - (X + \delta X) \, \frac{dy}{2} \right]. \end{aligned}$$

ω — угловая скорость вращенія параллелоипеда вокругъ оси Z' .

Раскрывая скобки, произведя сокращенія и пренебрегая безконечно малыми выше третьяго порядка, получимъ:

$$(Y_x - X_y) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Поэтому, составивъ по аналогіи подобныя уравненія для осей X' и Y' , получимъ:

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y \dots \dots \dots (8)$$

На основаніи приведеннаго выше вывода заключаемъ, что эти соотношенія имѣютъ всегда мѣсто: какъ для случая равновѣсія, такъ и движенія сплошно-деформирующагося тѣла. Для жидкости въ покоѣ, все касательныя напряжения, на основаніи опредѣленія, равны нулю.

5. Изъ уравненія (6) вытекаетъ, что напряжения вообще не нормальны къ соотвѣтственнымъ площадкамъ. Рѣшимъ поэтому такую задачу: найти для данной точки площадку (т. е. направленіе нормали къ ней), чтобы напряженіе на нее было къ ней нормально. Обозначая величину этого напряженія черезъ p и помня что p по направленію совпадаетъ съ нормалью къ соотвѣтственной площадкѣ, можемъ написать (см. обозначенія 4)

$$X_n = p.l, \quad Y_n = p.m, \quad Z_n = p.n;$$

уравненія (6) въ этомъ случаѣ перепишутся такъ:

$$\begin{aligned} (X_x - p)l + X_y m + X_z n &= 0, \\ Y_x l + (Y_y - p)m + Y_z n &= 0, \quad \dots \dots \dots (9) \\ Z_x l + Z_y m + (Z_z - p)n &= 0. \end{aligned}$$

Для возможности опредѣленія отсюда неизвѣстныхъ l, m, n , должно имѣть мѣсто условіе:

$$\begin{vmatrix} X_x - p, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - p, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - p \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

Въ анализѣ доказывается, что это, кубическое относительно p , уравненіе имѣетъ всѣ три корня p_1, p_2, p_3 дѣйствительными. Подставляя каждый изъ нихъ въ систему уравненій (9), найдемъ изъ нихъ величины пропорціональныя косинусамъ нормалей съ осями координатъ къ искомымъ площадкамъ. Такимъ образомъ, вообще говоря, для каждой точки сплошно-деформирующей среды существуетъ три взаимно-перпендикулярныхъ направленія, по которымъ дѣйствуютъ одни лишь нормальныя напряженія. Мы не будемъ останавливаться на тѣхъ частныхъ случаяхъ, когда въ уравненіи (10) появляются кратные корни, или корни равные нулю.

Эти нормальныя напряженія называются главными напряженіями въ данной точкѣ среды, а направленія ихъ — главными направленіями.

Выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки сплошно-деформирующей среды.

6. Обозначая составляющія скорости точки по осямъ координатъ X, Y, Z черезъ

$$u, v, w, \dots \dots \dots (11)$$

для составляющихъ ускоренія по тѣмъ же осямъ, получимъ:

$$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt} \dots \dots \dots (12)$$

Здѣсь берутся полныя производныя по времени, какъ независимому переменному, имѣя ввиду, что u, v и w суть вообще функціи координатъ x, y, z и времени t ; причемъ x, y, z сами являются функціями времени t (и параметровъ). Т. е. можно написать:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

но по опредѣленію

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

поэтому:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots \dots (13)$$

Два аналогичныхъ выраженія получается для

$$\frac{dv}{dt} \text{ и } \frac{dw}{dt}.$$

Дифференціальное уравненіе движенія нашего элементарнаго параллелоипеда по оси x получится, приравнивая составляющую ускорительной силы по этой оси, суммѣ составляющихъ силъ, приложенныхъ къ нему, по той же оси. Если плотность въ точкѣ M — ρ , то масса его будетъ:

$$(\rho + \delta\rho) dx dy dz,$$

ускорительная сила представится въ видѣ:

$$(\rho + \delta\rho) dx dy dz \cdot \frac{du}{dt};$$

сила, дѣйствующая на массу параллелоипеда:

$$(X + \delta X) (\rho + \delta\rho) dx dy dz.$$

Результирующая на грани $CMBB_1$ и A_1ADE по оси x напишется такъ:

$$- \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dy dz + \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx + \frac{\partial X_x}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dy dz,$$

или, послѣ сокращеній:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Совершенно также для граней CA_1AM и BB_1ED получимъ:

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} dy dx dz,$$

а для граней $MADB$ и CA_1EB_1 :

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} dz dx dy.$$

Приравнивая ускорительную силу суммѣ предыдущихъ силъ, найдемъ:

$$(\rho + \delta\rho) dx dy dz \frac{du}{dt} = (X + \delta X) (\rho + \delta\rho) dx dy dz + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz dx dy;$$

сокращая на $dx dy dz$ и пренебрегая бесконечно малыми (переходя къ предѣлу), получимъ:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

Поступая аналогично и по отношенію къ остальнымъ осямъ и принимая во вниманіе (13), найдемъ, по раздѣленіи на ρ , три дифференціальныя уравненія движенія сплошно-деформирующей среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right), \dots (14) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Изъ предыдущихъ уравненій вытекаетъ, что выраженія вида:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \text{ и т. д.}$$

могутъ быть разсматриваемы, какъ силы, дѣйствующія на единицу массы, источникомъ которыхъ являются поперхностныя напряженія.

Условіе сплошности.

7. Въ дополненіе къ предыдущимъ уравненіямъ должно быть выведено ещё одно, выражающее такъ называемое свойство сплошности движенія. Для этого подсчитаемъ измѣненіе массы нашего элементарнаго параллелепипеда за бесконечно малый промежутокъ времени dt .

Это измѣненіе, съ одной стороны, равно:

$$\left[(\rho + \delta\rho) + \frac{\partial(\rho + \delta\rho)}{\partial t} dt \right] dx dy dz - (\rho + \delta\rho) dx dy dz,$$

или, удерживая бесконечно малыя не выше четвертаго порядка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} dt dx dy dz, \dots (15)$$

съ другой стороны, количество матеріи, вступающее въ параллело-
педъ черезъ грань B_1CMB за время dt , будетъ:

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(U + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dt dy dz,$$

а выходящее черезъ грань A_1ADE :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dt dy dz;$$

отсюда приращеніе массы нашего элементарнаго параллелошипеда въ
направленіи оси x будетъ, вычитая изъ предпоследняго выраженія
последнее и пренебрегая безконечно малыми выше четвертаго по-
рядка:

$$- \frac{\partial \rho u}{\partial x} dt dx dy dz;$$

аналогично въ направленіи оси Y получимъ:

$$- \frac{\partial \rho v}{\partial y} dt dx dy dz,$$

и по оси Z :

$$- \frac{\partial \rho w}{\partial z} dt dx dy dz.$$

Складывая эти выраженія, найдемъ полное приращеніе массы за
время dt въ видѣ:

$$- \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dt dx dy dz \dots \dots \dots (16)$$

Такъ какъ (15) и (16) должны быть равны, то по сокращеніи на
 $dt dx dy dz$ получаемъ окончательно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) = 0. \dots \dots \dots (17)$$

Это и есть уравненіе или условіе непрерывности (или сплошно-
сти) движенія сплошно-деформирующагося тѣла. Замѣчая, что

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w, \end{aligned}$$

опредѣляемъ отсюда $\frac{d\rho}{dt}$ и подставляя въ (17), найдемъ оконча-
тельно

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \dots \dots \dots (17,a)$$

Для несжимаемого тѣла, т. е. если $\rho = const$, (17) обращается въ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (17, b)$$

Уравненія (17), (17, a) и (17, b) являются *условіями сплошности* для сплошно-деформирующагося тѣла.

Глава II.

Дифференціальные уравненія движенія идеальной жидкости. Ихъ интегралы. Условія на границахъ.

8. Давая въ уравненіяхъ (14) частныя значенія составляющимъ поверхностныхъ напряженій и силъ, дѣйствующихъ на единицу массы, а также плотности ρ , получимъ дифференціальные уравненія движенія сплошно-деформирующагося тѣла, обладающаго извѣстными частными свойствами, проявляющимися при дѣйствіи на него внѣшнихъ силъ.

Вышеуказанныя частныя значенія вводятся на основаніи спеціальныхъ гипотезъ относительно строенія разсматриваемаго тѣла и представляютъ собой связь между силами и перемѣщеніями. Этимъ гипотезамъ подчиняются поверхностныя напряженія; что же касается силъ, дѣйствующихъ на единицу массы, то онѣ подчиняются общимъ законамъ механики.

Поэтому для идеальной жидкости, для которой имѣютъ мѣсто равенства (7) и $\rho = const$, уравненія (14) переписутся въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \dots \dots \dots (18) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Сюда должно быть присоединено условіе сплошности (17, b) въ видѣ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (17, b)$$

Четыре уравненія (18) и (17, b) представляютъ систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными отно-

сительно четырехъ неизвѣстныхъ функцій u, v, w, p , зависящихъ отъ переменныхъ x, y, z, t . Для нахождения этихъ функцій должны быть даны начальныя условія для момента t_0 и условія на границахъ. Подробнѣе объ этомъ будетъ сказано дальше.

Въ случаѣ сжимаемой жидкости, должна быть добавлена зависимость

$$\rho = f(p) \dots \dots \dots (19)$$

Уравненія (18) называются *дифференціальными уравненіями Эйлера для движенія идеальной жидкости*. Помощью ихъ опредѣляется состояніе движущейся жидкости въ данной точкѣ пространства, отнесенной къ какой-либо неподвижной системѣ координатъ.

Лагранжъ написалъ тѣ же уравненія въ иномъ видѣ. Онъ задался цѣлью прослѣдить за измѣненіями въ обстоятельствахъ движенія опредѣленной частицы жидкости, т. е. если координаты начального положенія частицы жидкости для момента t_0 будутъ a, b, c , то искомыми функціями у него являлись координаты x, y, z и давленіе p для этой частицы въ какой-либо моментъ t , въ видѣ:

$$x = f_1(t, a, b, c), \quad y = f_2(t, a, b, c), \quad z = f_3(t, a, b, c), \quad p = \Psi(t, a, b, c) \dots (20)$$

Выводомъ этихъ уравненій мы здѣсь не будемъ заниматься.

Въ томъ случаѣ, когда обстоятельства движенія въ какой-либо неподвижной точкѣ пространства не зависятъ отъ времени— движеніе называется установившимся. Аналитически это выразится такъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (21).$$

т. е. u, v, w, p суть явныя функціи однѣхъ лишь координатъ.

Въ противномъ случаѣ движеніе называется *неустановившимся*.

9. Геометрическое мѣсто точекъ въ жидкости, касательныя къ которому по направленію совпадаютъ со скоростями точекъ въ данный моментъ на немъ лежащихъ, называется *линіей тока*. Система совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ ее, напишется такъ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \dots \dots \dots (22)$$

Интегралы этой системы представляются въ видѣ

$$\Psi_1(x, y, z, t) = C_1, \quad \Psi_2(x, y, z, t) = C_2 \dots \dots \dots (23)$$

Здѣсь t играетъ роль параметра и входитъ лишь въ случаѣ неустановившагося движенія; двѣ поверхности (23) даютъ искомую линію тока.

Произвольныя постоянныя C_1 и C_2 опредѣляются, задавая моментъ времени и точку, черезъ которую должна проходить линия тока, т. е. $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Если же мы хотимъ опредѣлить траекторію какой-либо частицы жидкости или такъ называемую *линію теченія*, то придется интегрировать систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій вида:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w \quad \dots \dots \dots (24).$$

Интегралы этой системы имѣютъ видъ:

$$\gamma_1(x, y, z, t) = C'_1, \quad \gamma_2(x, y, z, t) = C'_2, \quad \gamma_3(x, y, z, t) = C'_3 \quad (25),$$

причемъ произвольныя постоянныя опредѣляются какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Изъ уравненія (25) x , y , z найдутся въ функціи t и произвольныхъ постоянныхъ, т. е. уравненія линии теченія находятся въ явной формѣ.

Для нахождения уравненій линии тока достаточно изъ (25) исключить t . Роль параметра t въ (23) будетъ играть одно изъ произвольныхъ постоянныхъ въ (25).

Ясно, что для установившагося движенія линии теченія и тока совпадаютъ.

Въ томъ случаѣ, когда существуетъ такая функція $\varphi(x, y, z, t)$, отъ координатъ и времени, для которой имѣютъ мѣсто зависимости:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \dots \dots \dots (26)$$

говорять, что *скорости точекъ жидкости имѣютъ потенциалъ*; другими словами имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$d\varphi = udx + vdy + wdz,$$

для чего необходимо и достаточно, чтобы:

$$2\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad 2\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad 2\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (27)$$

Если послѣдняя зависимость не удовлетворяется, то потенциала скоростей не существуетъ; въ такомъ случаѣ *движеніе называется вихревымъ*.

10. Если въ пространствѣ, занятомъ движущейся жидкостью, взять бесконечно-малый замкнутый контуръ (неподвижный относительно осей координатъ) и черезъ всѣ его точки провести линіи тока, то получится такъ называемая *трубка тока*; если же провести линіи

течения, то получится *струя*. Въ установившемся движеніи тѣ и другія совпадаютъ.

Двумя бесконечно близкими сѣченіями, нормальными къ линіямъ теченія, образуящимъ струю (ихъ можно считать въ первомъ приближеніи въ каждой точкѣ взаимно параллельными), выдѣлимъ изъ нея бесконечно малый объемъ; обозначая площадь сѣченія въ данной точкѣ черезъ F (величина бесконечно малая), скорость черезъ v , разстояніе между взятыми сѣченіями черезъ ds и предполагая въ общемъ случаѣ сжимаемую жидкость, можемъ считать, что за бесконечно малый промежутокъ времени dt черезъ сѣченіе F протекла масса жидкости равная:

$$Fv\rho dt,$$

а вытекла въ то же время черезъ другое сѣченіе масса

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial s} ds \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds \right) \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds \right) dt$$

Черезъ боковую поверхность разсматриваемаго элементарнаго объема жидкость не протекаетъ, такъ какъ эта поверхность все время состоитъ изъ линій теченія, которыхъ скорости точекъ жидкости касаются.

Вычитая изъ предпоследняго выраженія послѣднее, и пренебрегая бесконечно малыми выше второго порядка, найдемъ, послѣ упрощеній:

$$- \frac{\partial (Fv\rho)}{\partial s} ds dt,$$

выраженіе, представляющее собой измѣненіе массы нашего бесконечно малаго объема за время dt . Съ другой стороны оно равно:

$$\frac{\partial (Fds\rho)}{\partial t} dt \text{ или } \frac{\partial (F\rho)}{\partial t} ds dt;$$

отсюда, сравнивая эти выраженія, находимъ:

$$\frac{\partial (F\rho)}{\partial t} ds dt + \frac{\partial (F\rho s)}{\partial s} ds dt = 0 \dots \dots \dots (17,c)$$

или сокращая на $ds dt$:

$$\frac{\partial (F\rho)}{\partial t} + \frac{\partial (Fv\rho)}{\partial s} = 0 \dots \dots \dots (17,d)$$

Полученное условіе представляетъ собой условіе сплошности для сжимаемой жидкости, отнесенное къ элементу струи въ данной точкѣ пространства, въ противоположность условію (17) отнесенному къ точкѣ пространства, какъ геометрическому образу.

Для несжимаемой жидкости, т. е. при $\rho = const$, (17, d) можно сократить на ρ , получится

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (Fv)}{\partial s} = 0 \dots \dots \dots (17,e)$$

Для установившагося движенія, для котораго струи и трубки тока совпадаютъ

$$\frac{\partial (F\rho)}{\partial t} = 0,$$

а потому:

$$Fv\rho = C, \dots \dots \dots (17, f)$$

гдѣ C постоянная вдоль струи, мѣняющая свое значеніе отъ одной струи къ другой.

Лѣвая часть послѣдняго равенства есть такъ называемый расходъ въ единицахъ массы въ единицу времени черезъ сѣченіе струи.

Въ случаѣ $\rho = const$, т. е. жидкость несжимаема, имѣемъ:

$$Fv = \frac{C}{\rho} = C_1 \dots \dots \dots (17, g)$$

Мы видимъ, что въ установившемся движеніи расходъ вдоль струи (или трубки тока) постояненъ, такъ что въ этомъ случаѣ струю можно разсматривать какъ трубку съ твердыми стѣнками.

Условіе постоянства расхода по струѣ приводитъ насъ къ заключенію, что струя нигдѣ внутри жидкости не можетъ начинаться, ни кончатся; она можетъ образовывать лишь замкнутые контуры или простирается изъ безконечности въ безконечность. Все это вѣрно при наличности условія сплошности теченія; если же въ жидкости есть мѣста, черезъ которыя она притекаетъ или утекаетъ, то предыдущія положенія становятся невѣрными.

11. Для уравненій (18) можетъ быть найденъ одинъ интеграль въ весьма общей формѣ. Предварительно сдѣлаемъ для этого нѣкоторыя преобразованія въ этихъ уравненіяхъ.

Замѣтимъ, что почти всегда, силы, дѣйствующія на единицу массы, имѣютъ потенциалъ, т. е. существуетъ функція U (отъ координатъ x, y, z и времени t), для которой:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}; \dots \dots \dots (28)$$

кромѣ того, пользуясь (19), введемъ такую функцію P :

$$P = \int \frac{dp}{f(p)} \dots \dots \dots (29)$$

Помня, что p функція координатъ x, y, z и времени t , имѣемъ:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (29, a)$$

Поэтому уравненія (18) перепишутся такъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial y}, \dots \dots \dots (30) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе обозначенія (27), получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U-P)}{\partial x} - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_2 w - \omega_3 v), \\ \frac{\partial(U-P)}{\partial y} - \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \quad \dots (31) \\ \frac{\partial(U-P)}{\partial z} - \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_1 v - \omega_2 u); \end{aligned}$$

или, помня, что

$$v^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

гдѣ v скорость точки по величинѣ, можемъ написать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_2 w - \omega_3 v), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \quad \dots (31, a) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_1 v - \omega_2 u). \end{aligned}$$

Возьмемъ какую либо линію теченія и на ней точку; положеніе этой точки будемъ опредѣлять длиною s дуги линіи теченія отъ какой либо начальной точки до рассматриваемой въ данный моментъ.

Скорость точки, по величинѣ, обозначена нами черезъ v , направленіе ея совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ линіи теченія въ этой точкѣ, косинусы его съ осями координатъ будутъ:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Мы можемъ написать слѣдующее равенство:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{u}{v},$$

такъ какъ $v = \frac{ds}{dt}$.

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{ds} ds = \frac{u}{v} ds, \quad \frac{dy}{ds} ds = \frac{v}{v} ds, \quad \frac{dz}{ds} ds = \frac{w}{v} ds.$$

Помножимъ уравненія (31, a) почленно на послѣднія равенства, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) \frac{dx}{ds} ds &= \frac{1}{v} u \frac{\partial u}{\partial t} ds + 2 \frac{u}{v} (\omega_2 w - \omega_3 v) ds, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) \frac{dy}{ds} ds &= \frac{1}{v} v \frac{\partial v}{\partial t} ds + 2 \frac{v}{v} (\omega_3 u - \omega_1 w) ds, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) \frac{dz}{ds} ds &= \frac{1}{v} w \frac{\partial w}{\partial t} ds + 2 \frac{w}{v} (\omega_1 v - \omega_2 u) ds. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, найдемъ:

$$\frac{d}{ds} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) ds = \frac{\partial v}{\partial t} ds,$$

интегрируя вдоль линии тока отъ 0 до s, имѣемъ:

$$U - P - \frac{v^2}{2} = \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right)_{a, b, c} + \int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} ds. \quad \dots (32)$$

Здѣсь a, b, c координаты начальной точки, такъ что справа окажется функція одного лишь времени t . Для установившагося движенія эта функція обратится въ постоянную величину, мѣняющуюся отъ одной линии течения (совпадающей съ линіей тока) къ другой (интеграль, стоящій въ правой части, обращается въ нуль, такъ какъ $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$). Этотъ случай соотвѣтствуетъ извѣстной теоремѣ Бернулли.

Въ случаѣ если скорости имѣютъ потенциалъ, пользуясь обозначеніями (26) для перваго изъ уравненій (30), получимъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial (U - P)}{\partial x};$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} - (U - P) \right] = 0.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ

$$v^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2,$$

то можно написать:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + P \right) = 0.$$

Изъ двухъ другихъ уравненій (30) тѣмъ же путемъ найдемъ:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - U + P \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - U + P \right) = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что выраженія въ скобкахъ могутъ быть функціями одного лишь времени. Слѣдовательно:

$$\frac{1}{2} v^2 - U + P = \Psi(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Правая часть можетъ быть принята за произвольную функцію $\Phi(t)$, слѣдовательно

$$\frac{1}{2} v^2 - U + P = \Phi(t) \dots \dots \dots (33)$$

Въ случаѣ установившагося движенія эта произвольная функція обратится въ произвольную постоянную:

$$\frac{1}{2} v^2 - U + P = C \dots \dots \dots (34)$$

Эта постоянная сохраняетъ свое значеніе для всей области жидкости, движущейся съ потенциаломъ скоростей; чѣмъ этотъ случай и отличается отъ движенія вихревого, гдѣ на основаніи (32) постоянная мѣняется отъ одной линіи тока къ другой.

Уравненіе (33) носитъ названіе *интеграла Коши*. Лѣвая часть уравненій (32), (33) и (34) есть, какъ легко замѣтить, полная энергія на единицу массы частицы жидкости въ данной точкѣ, въ данный моментъ; поэтому мы можемъ ихъ считать интегралами живыхъ силъ для движенія жидкости, сжимаемой, но не вязкой. Въ случаѣ несжимаемой и идеальной жидкости, $\rho = const.$, поэтому, на основаніи (29):

$$P = \frac{p}{\rho}; \dots \dots \dots (35)$$

на основаніи чего предыдущіе интегралы значительно упрощаются.

12. Уравненія (17), (18) и (19), въ связи съ условіями на границахъ и начальными условіями, являются, какъ это раньше было указано, достаточными для опредѣленія пяти величинъ:

$$u, v, w, p \text{ и } \rho.$$

По существу вопроса функція эти должны быть однозначными. Функція u, v, w вообще говоря непрерывны, хотя могутъ существовать поверхности на которыхъ они претерпѣваютъ разрывъ; такъ напримѣръ на поверхностяхъ раздѣла двухъ жидкостей, или въ струяхъ.

Давленіе p для жидкостей необходимо величина конечная, непрерывная и положительная (пренебрегая сѣпленіемъ); въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ p становится отрицательнымъ, жидкость претерпѣваетъ разрывъ, или образуется поверхность раздѣла на которой характеръ движенія совершенно измѣняется.

Плотность ρ всюду конечна и положительна, но не должна быть обязательно непрерывной.

Скажемъ теперь объ условіяхъ на границахъ, необходимыхъ для окончательнаго опредѣленія искомымъ пяти величинъ.

Движущаяся жидкость можетъ быть ограничена со всѣхъ сторонъ, или можетъ простираться въ безконечность по нѣкоторымъ на-

направленіямъ или, наконецъ, по всеѣмъ направленіямъ. Въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ жидкость ограничена, задается или видъ самой поверхности или величина внѣшняго давленія на нее. Тѣ части пограничной поверхности, видъ которыхъ задается для каждаго момента движенія, называются стѣнками; онѣ могутъ, напримѣръ, образовываться поверхностями тѣлъ, движущихся или покоящихся въ жидкости. Давленіе на стѣнки, для каждой точки ихъ, въ любой моментъ, становится извѣстнымъ послѣ окончательнаго рѣшенія вопроса о движеніи разсматриваемой жидкости. Тѣ части поверхности на которыхъ задается величина внѣшняго давленія, называются свободными поверхностями жидкости; опредѣленіе вида ихъ является, иногда, рѣшеніемъ поставленной задачи.

Во все время движенія, въ силу условія неразрывности, жидкость не должна отдѣляться отъ стѣнокъ, другими словами нормальныя составляющія скорости какой либо точки стѣнки и точки жидкости, съ ней совпадающей, должны быть равны; въ противномъ случаѣ имѣло бы мѣсто протеканіе жидкости черезъ стѣнки, что противѣчитъ условію налагаемому на нихъ.

Если уравненіе стѣнки (подвижной, въ самомъ общемъ случаѣ) будетъ:

$$f(x, y, z, t) = 0, \dots \dots \dots (36)$$

и составляющія скорости по нормали къ ней въ какой либо точкѣ (съ координатами x, y, z) на ней v , то черезъ безконечно малый промежутокъ времени δt , координаты этой точки будутъ:

$$x + v\delta t, \quad y + m\delta t, \quad z + n\delta t,$$

гдѣ l, m, n косинусы нормали къ поверхности (36) въ разсматриваемой точкѣ въ данный моментъ t .

По условію точка должна остаться на поверхности, т. е.

$$f(x + v\delta t, \quad y + m\delta t, \quad z + n\delta t, \quad t + \delta t) = 0.$$

Или, разлагая въ рядъ и принимая во вниманіе (36):

$$v \left(l \frac{\partial f}{\partial x} + m \frac{\partial f}{\partial y} + n \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

Но

$$l = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad n = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial z},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2},$$

поэтому

$$v = - \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (37)$$

Таково выражение для нормальной составляющей скорости какой-либо точки подвижной стѣнки.

Съ другой стороны, на основаніи предыдущихъ разсужденій, должно быть:

$$v = lu + mv + nw,$$

т. е. v должно быть равно проэкции скорости точки жидкости, имѣющей тѣ же начальныя координаты, на ту же нормаль. Сравнивая съ (37), и подставляя вмѣсто l, m, n ихъ значенія, найдемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \dots \dots \dots (38)$$

Это и есть дополнительное условіе для отысканія величинъ u, v, w, p и ρ .

Если въ жидкости существуетъ поверхность на которой скорости мѣняются скачкомъ, то какъ съ одной такъ и съ другой стороны ея должно выполняться условіе (38).

Если составляющія скорости точекъ жидкости, по другую сторону поверхности раздѣла, обозначимъ черезъ u_1, v_1, w_1 , то должно удовлетворяться условіе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_1 + \frac{\partial f}{\partial z} w_1 = 0,$$

или, вычитая это уравненіе изъ (38):

$$(u - u_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (v - v_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (w - w_1) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \dots \dots (39)$$

Въ случаѣ неподвижной стѣнки $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, и (38) принимаетъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0, \dots \dots \dots (38,a)$$

другими словами скорости точки жидкости все время касаются неподвижной стѣнки, т. е. стѣнка состоитъ изъ линій теченія.

Поэтому, въ случаѣ если неподвижная стѣнка есть замкнутая поверхность, внутри которой движется жидкость, то ея касаются все время одѣи и тѣ же частицы жидкости.

Можно показать, что стѣнки въ движущейся жидкости находятся всегда въ соприкосновеніи съ одѣими и тѣми же частицами жидкости.

Пусть мы имѣемъ жидкость въ движеніи и въ ней подвижную стѣнку (36). Въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто условіе (38):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \dots \dots \dots (38)$$

Считая движеніе жидкости извѣстнымъ, можно сказать, что функція f есть интегралъ линейнаго дифференціального уравненія съ част-

ными производными первого порядка. Какъ извѣстно, для интегрированія этого уравненія составляется вспомогательная система совокупныхъ уравненій вида:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt. \quad (24, a)$$

Полная система интеграловъ ея можетъ быть написана въ видѣ:

$$x = \varphi_1(a, b, c, t), \quad y = \varphi_2(a, b, c, t), \quad z = \varphi_3(a, b, c, t), \quad (40)$$

гдѣ a, b, c координаты начального положенія частицы жидкости; сами же интегралы представляютъ линію теченія, проходящую черезъ это начальное положеніе.

Для полученія интеграла уравненія (38, a) нужно изъ уравненій (40) опредѣлить a, b и c и взять произвольную зависимость между ними:

$$\Psi(a, b, c) = 0.$$

Съ другой стороны, на основаніи (38), $f(x, y, z, t) = 0$ есть общій интеграль этого уравненія, слѣдовательно:

$$f(x, y, z, t) = \Psi_1(a, b, c) = 0,$$

гдѣ Ψ_1 нѣкоторая функція; a, b, c суть функціи x, y, z, t . Здѣсь x, y, z на основаніи (40) представляютъ координаты точекъ линіи теченія въ любой моментъ времени, проходящей въ начальный моментъ черезъ точку съ координатами a, b, c .

Отсюда мы видимъ, что вся поверхность

$$f(x, y, z, t) = 0$$

образована линіями теченія, проходящими въ начальный моментъ черезъ точки лежащія на этой поверхности, т. е. наша подвижная стѣнка все время находится въ соприкосновеніи съ однѣми и тѣми-же частицами жидкости.

Глава III.

Кинематика жидкаго тѣла.

14. Подъ дѣйствиємъ силъ частицы жидкости деформируются; изученіемъ этихъ деформаций мы и займемся въ настоящей главѣ.

Для этого возьмемъ въ жидкости элементарный шарикъ, конечно малаго радіуса r и отнесемъ его къ новой координатной системѣ X', Y', Z' , оси которой параллельны нашимъ неподвижнымъ осямъ, а начало совпадаетъ все время съ центромъ шарика.

Координаты точек шарика, отнесенных къ новой системѣ, обозначимъ черезъ ξ , τ , ζ (величины безконечно малыя); координаты центра шарика въ какой либо моментъ, по отношенію къ неподвижной системѣ, пусть будутъ x , y , z ; составляющія скорости его по осямъ для того же момента u , v , w . Въ такомъ случаѣ составляющія скорости какой либо точки шарика, по осямъ неподвижныхъ координатъ будутъ:

$$\begin{aligned} u + du &= u + \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v + dv &= v + \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \dots \dots \dots (41) \\ w + dw &= w + \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \tau \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Отсюда видимъ, что все точки шарика имѣютъ одну, общую съ центромъ его, скорость, составляющія по неподвижнымъ осямъ которой въ данный моментъ равны u , v , w ; другими словами весь шарикъ перемѣщается поступательно какъ твердое тѣло. Къ этому общему поступательному движенію присоединяются относительныя перемѣщенія точекъ шарика.

Составляющія относительной скорости какой-либо точки шарика, съ координатами ξ , τ , ζ , по отношенію къ разсматриваемой относительной системы координатъ, будутъ на основаніи (41):

$$\begin{aligned} du &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \\ dv &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \dots \dots \dots (42) \\ dw &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \tau \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

15. Для изслѣдованія дальнѣйшихъ движеній шарика примѣнимъ къ нему законъ моментовъ количества движенія вокругъ трехъ относительныхъ осей координатъ.

Моментъ количества движенія вокругъ оси параллельной оси X будетъ:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \iiint \left[\tau \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \tau \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \zeta \left(\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] d\omega, \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

гдѣ $d\omega$ элементъ объема нашего шарика.

Здѣсь интегрирование распространяется по всему объему шарика, причѣмъ функціи $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, и т. д. представляютъ постоянныя величины для всей области интегрированія, — величины, которыя они принимаютъ при подстановкѣ въ нихъ абсолютныхъ координатъ центра шарика въ данный моментъ.

Поэтому тройной интеграль (43), какъ легко видѣть, сведется къ такому:

$$M_x = \rho \left[\frac{\partial w}{\partial y} \iiint \eta^2 d\omega - \frac{\partial v}{\partial z} \iiint \zeta^2 d\omega \right];$$

причемъ остальные интегралы исчезнуть въ виду того, что для каждой точки шарика съ координатами ξ, η, ζ есть точка съ координатами $-\xi, -\eta, -\zeta$; поэтому для интеграловъ, подобныхъ приведенному, можемъ написать:

$$\rho \iiint \eta \xi \frac{\partial w}{\partial x} d\omega = \rho \frac{\partial w}{\partial x} \iiint \eta \xi d\omega = 0.$$

Замѣтимъ теперь, что ввиду полной симметріи шарика по отношенію къ координатнымъ осямъ, имѣемъ:

$$\rho \iiint \eta^2 d\omega = \rho \iiint \zeta^2 d\omega = \frac{1}{2} T,$$

гдѣ T моментъ инерціи шарика относительно оси параллельной оси X , выражающійся такъ:

$$T = \rho \iiint (\eta^2 + \zeta^2) d\omega.$$

Слѣдовательно имѣемъ:

$$M_x = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (44)$$

Съ другой стороны, моментъ количества движенія равенъ моменту инерціи на угловую скорость относительно разсматриваемой оси, т. е.

$$M_x = T\omega_1;$$

если черезъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ обозначимъ мгновенныя угловыя скорости вращенія шарика вокругъ относительныхъ осей X', Y', Z' .

Сравнивая съ (44), находимъ:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

На основаніи полученныхъ результатовъ мы можемъ сказать, что кромѣ поступательнаго движенія шарикъ, въ каждый моментъ времени, имѣетъ и вращальное движеніе, которое онъ совершаетъ подобно твердому тѣлу вокругъ мгновенныхъ осей, проходящихъ черезъ его центръ.

Составляющія угловой скорости этого вращения по осямъ координатъ будутъ:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \dots \dots \dots (45) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Обращаясь къ сказанному относительно формуль (26), приходимъ къ слѣдующему существенно важному выводу: *если жидкость движется съ потенціаломъ скоростей то частицы ея не могутъ имѣть вращательнаго движенія, и наоборотъ наличность вращательнаго движенія исключаетъ возможность движенія съ потенціаломъ скоростей.*

16. Если точка съ координатамъ ξ, η, ζ имѣеть относительно осей три мгновенныхъ угловыхъ скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то, какъ извѣстно изъ механики, проэкции вектора вращательной скорости ея на тѣ же оси координатъ будутъ:

$$\begin{aligned} dr_1 &= \omega_2 \zeta - \omega_3 \eta, \\ dr_2 &= \omega_3 \xi - \omega_1 \zeta, \dots \dots \dots (45) \\ dr_3 &= \omega_1 \eta - \omega_2 \xi. \end{aligned}$$

Если изъ скоростей (42) вычестъ послѣднія выраженія, то въ результатѣ получимъ составляющія относительной скорости точекъ шарика, обуславливающія деформацію его.

Принимая во вниманіе (45), получимъ для этихъ составляющихъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} ds_1 &= a \xi + p_3 \eta + p_2 \zeta = \frac{\partial F}{\partial \xi}, \\ ds_2 &= p_3 \xi + b \eta + p_1 \zeta = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \dots \dots \dots (47) \\ ds_3 &= p_2 \xi + p_1 \eta + c \zeta = \frac{\partial F}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

гдѣ

$$F = \frac{1}{2} \left(a \xi^2 + b \eta^2 + c \zeta^2 + 2p_1 \eta \zeta + 2p_2 \xi \zeta + 2p_3 \xi \eta \right), \dots \dots \dots (48)$$

т. е. точки разсматриваемаго шарика имѣють движеніе съ потенціаломъ скоростей по отношенію къ осямъ, которымъ сообщено, общее для всѣхъ точекъ, поступательное и вращательное движенія.

Причемъ для уравненій (47) приняты слѣдующія обозначенія:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad p_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (49)$$

Эти шесть величинъ называются *скоростями деформаций по осямъ.*

17. Обратимся теперь къ нашему шарикѣ. Для него имѣемъ:

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

или, дифференцируя:

$$r \frac{dr}{dt} = \xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt}.$$

Обозначая косинусы угловъ радиуса r съ осями черезъ l, m, n , имѣемъ:

$$l = \frac{\xi}{r}, \quad m = \frac{\eta}{r}, \quad n = \frac{\zeta}{r}, \quad \dots \dots \dots (50)$$

поэтому:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = l \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dt} + m \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dt} + n \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Замѣтимъ теперь, что $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ суть скорости точекъ шарика

по осямъ координатъ, т. е. на основаніи (47) они равны соотвѣтственно ds_1, ds_2, ds_3 . Подставляя поэтому эти значенія въ предыдущія уравненія, найдемъ:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{l}{r} (a\xi + p_3\eta + p_2\zeta) + \frac{m}{r} (p_3\xi + b\eta + p_1\zeta) + \frac{n}{r} (p_2\xi + p_1\eta + c\zeta),$$

или, раскрывая скобки и пользуясь (50):

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = al^2 + bm^2 + cn^2 + 2p_1mn + 2p_2ln + 2p_3lm \dots (51)$$

Лѣвая часть послѣдняго равенства представляетъ, какъ извѣстно, *скорость относительнаго удлиненія* радиуса сферы ($\frac{dr}{r}$ относительное удлиненіе). Мы видимъ, что эта скорость зависитъ лишь отъ первоначальнаго направленія радиуса. Обозначимъ ее черезъ λ и помножимъ обѣ части послѣдняго равенства на r_1^2 , гдѣ r_1 , радиусъ векторъ того же направленія что и r , а ξ_1, η_1, ζ_1 координаты его конца, слѣдовательно:

$$l = \frac{\xi_1}{r_1}, \quad m = \frac{\eta_1}{r_1}, \quad n = \frac{\zeta_1}{r_1}.$$

Въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\lambda r_1^2 = a\xi_1^2 + b\eta_1^2 + c\zeta_1^2 + 2p_1\eta_1\zeta_1 + 2p_2\xi_1\zeta_1 + 2p_3\xi_1\eta_1.$$

Приравнивая обѣ части нѣкоторой постоянной k , имѣемъ:

$$\lambda r_1^2 = k$$

и

$$a\xi_1^2 + b\eta_1^2 + c\zeta_1^2 + 2p_1\eta_1\zeta_1 + 2p_2\xi_1\zeta_1 + 2p_3\xi_1\eta_1 = k \dots (52)$$

Полученная поверхность второго порядка называется *поверхностью удлинения* и есть одна из *поверхностей равнаго потенциала скоростей удлинения*. Для нея, какъ мы видимъ, скорости удлинения радиусовъ векторовъ шарика обратно пропорціональны ихъ квадратамъ. Постоянная k можетъ принимать значенія большія, меньшія или равныя нулю.

Если равенства (47) почленно умножимъ на dt , то слѣва окажутся деформациі за этотъ промежутокъ времени, равныя какъ мы выше указали $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$; слѣдовательно:

$$\begin{aligned} d\xi &= (adt)\xi + (p_3 dt)\eta + (p_2 dt)\zeta, \\ d\eta &= (p_3 dt)\xi + (b dt)\eta + (p_1 dt)\zeta, \quad \dots \dots \dots (53) \\ d\zeta &= (p_2 dt)\xi + (d_1 dt)\eta + (c dt)\zeta. \end{aligned}$$

18. Для уясненія смысла коэффициентовъ a, b, c, p_1, p_2, p_3 , вошедшихъ въ послѣднія уравненія и въ уравненіи (51), найдемъ сперва скорости удлиненія радиусовъ векторовъ совпадающихъ съ относительными координатными осями. Для этого нужно послѣдовательно положить: $l = 1, m = n = 0$; $l = n = 0, m = 1$; $l = m = 0, n = 1$. Получимъ, что скорости удлиненія будутъ соотвѣтственно a, b, c . Если принять во вниманіе однѣ лишь эти деформациі, то параллелопипедъ съ ребрами, параллельными осямъ координатъ, деформируется въ параллелопипедъ съ измѣненными по величинѣ, но не по направленію ребрами. Это вытекаетъ изъ уравненій (53), если въ нихъ положить $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

Ребра деформированнаго параллелопипеда будутъ:

$$\xi(1 + a dt), \quad \eta(1 + b dt), \quad \zeta(1 + c dt).$$

Объемъ первоначальнаго параллелопипеда

$$V = \xi\eta\zeta,$$

объемъ деформированнаго

$$V_1 = \xi\eta\zeta(1 + a dt)(1 + b dt)(1 + c dt);$$

или, произведя дѣйствія и пренебрегая безконечно-малыми выше четвертаго порядка:

$$V_1 = \xi\eta\zeta \left[1 + (a + b + c) dt \right].$$

Отсюда, *коэффициентъ кубическаго расширенія, отнесенный къ единицѣ времени, (или скорость кубическаго расширенія)*, имѣющей видъ:

$$\theta = \frac{1}{V} \frac{V_1 - V}{dt},$$

будетъ:

$$\theta = a + b + c, \quad \dots \dots \dots (54)$$

Если возьмемъ радиусъ векторъ r' , направленный по биссектрисѣ осей Ξ и Π (черт. 3), для которой $l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n = 0$, то изъ (51) получимъ:

$$\frac{1}{r'} \frac{dr'}{dt} = p_3;$$

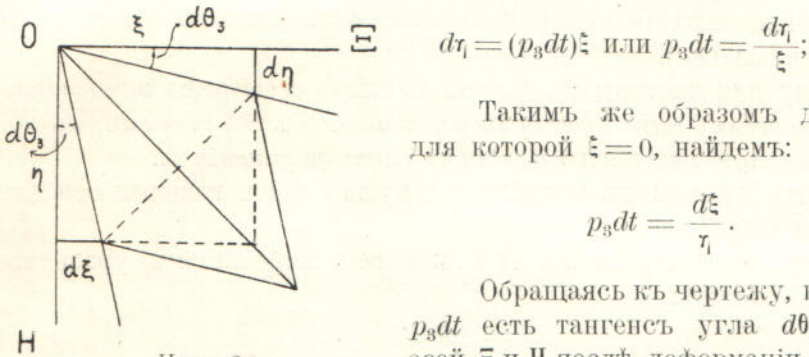
т. е. p_3 есть скорость удлиненія радиуса вектора, направленнаго по этой биссектрисѣ. Аналогичныя значенія найдемъ для p_1 и p_2 .

Можно дать и другое толкованіе этимъ величинамъ.

Пренебрегая всѣми деформациями, кромѣ зависящей отъ p_3 , получимъ изъ (53):

$$d\xi = (p_3 dt) \tau, \quad d\tau = (p_3 dt) \xi.$$

Разсмотримъ ось Ξ , для которой $\tau = 0$. Получимъ:



$$d\tau = (p_3 dt) \xi \quad \text{или} \quad p_3 dt = \frac{d\tau}{\xi};$$

Такимъ же образомъ для оси Π , для которой $\xi = 0$, найдемъ:

$$p_3 dt = \frac{d\xi}{\tau}.$$

Обращаясь къ чертежу, видимъ, что $p_3 dt$ есть тангенсъ угла $d\theta_3$ поворота осей Ξ и Π послѣ деформации. Такъ какъ этотъ уголъ безконечно малъ, то можемъ написать:

$$p_3 dt = d\theta_3, \quad \text{или} \quad \frac{d\theta_3}{dt} = p_3,$$

т. е. p_3 есть скорость поворота осей Ξ и Π вокругъ оси Z .

Мы видимъ, что прямой уголъ деформируется въ $\frac{\pi}{2} - 2d\theta_3$, и прямоугольникъ, съ площадью $\xi \cdot \tau$, обращается въ параллелограммъ, площадь котораго:

$$\frac{\xi \cdot \tau}{\cos^2 d\theta_3} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2d\theta_3 \right) \quad \text{или} \quad \frac{\xi \cdot \tau}{\cos^2 d\theta_3} \cos 2d\theta_3 = \xi \cdot \tau (1 - tg^2 d\theta_3),$$

что, въ виду малости $d\theta_3$, обращается въ $\xi \cdot \tau$, т. е. рассматриваемая деформация не вліяетъ на величину площади.

Если бы вмѣсто прямоугольника мы взяли параллелоипедъ съ высотой ζ (по оси Z), имѣющій въ основаніи рассматриваемый прямоугольникъ, то убѣдились бы, что объемъ его не измѣнился, т. е. рассматриваемая деформация не вліяетъ на измѣненіе элементарнаго объема. Тѣ же разсужденія применимы къ величинамъ p_1 и p_2 .

Такимъ образомъ значеніе шести вышеуказанныхъ коэффициентовъ вполне выяснено. Мы видимъ, что три взаимно-перпендикулярныхъ радіуса вектора послѣ деформаціи удлинняются и углы между ними перекашиваются.

Спрашивается, имѣются ли три такихъ взаимно-перпендикулярныхъ направленія, для которыхъ существуетъ одна лишь деформація удлинненія, углы же между ними остаются неизмѣнно прямыми. Легко показать, что такія направленія существуютъ.

Для этого замѣтимъ, что скорости удлинненія радіусовъ векторовъ, концы которыхъ расположены на поверхности удлинненій, направлены по нормали къ этой поверхности; это вытекаетъ изъ свойствъ движенія съ потенциаломъ скоростей. Тамъ гдѣ нормаль къ поверхности совпадаетъ съ направлениемъ радіуса вектора изъ начала, имѣютъ мѣсто, очевидно, однѣ лишь удлинненія; скорости перекашивания обращаются въ нуль. Для поверхностей второго порядка существуетъ три взаимно-перпендикулярныхъ направленія, обладающихъ этимъ свойствомъ (главныя оси).

Поэтому для частицы въ данной точкѣ *существуетъ три взаимно ортогональныхъ направленія (оси), называемыхъ главными, по которымъ деформаціи сводятся къ однимъ лишь удлинненіямъ.*

Для отысканія этихъ направленій нужно найти главныя оси для поверхности (52).

Принявъ эти направленія за новыя оси, перепишемъ уравненія (53) въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} d\xi &= A dt \xi, \\ d\eta &= B dt \eta, \dots \dots \dots (53,a) \\ d\zeta &= C dt \zeta. \end{aligned}$$

Здѣсь

$$A = \frac{\partial U}{\partial x} = U'_x, \quad B = \frac{\partial V}{\partial y} = V'_y, \quad C = \frac{\partial W}{\partial z} = W'_z, \dots \dots (53,b)$$

гдѣ U, V, W проложеніе скорости точки на главныя направленія. Между U, V, W и прежними u, v, w существуютъ такія соотношенія:

$$\begin{aligned} u &= l_x U + m_x V + n_x W, \\ v &= l_y U + m_y V + n_y W, \dots \dots \dots (53,c) \\ w &= l_z U + m_z V + n_z W; \end{aligned}$$

l, m, n суть косинусы какой либо изъ прежнихъ осей (обозначенной индексомъ) съ главными направленіями.

Обратимъ вниманіе еще на одно свойство деформаціи. На основаніи (54) мы видимъ, что деформаціи являются ничѣмъ инымъ, какъ линейнымъ преобразованиемъ отъ одной системы координатъ къ дру-

гой. При такихъ преобразованіяхъ плоскость остается плоскостью, двѣ параллельныхъ плоскости остаются параллельными, прямая деформируется въ прямую. Такая деформация называется *однородной*.

19. Вернемся теперь къ выраженіямъ (53). Мы видимъ, что координаты какой либо точки ξ, τ, ζ обратятся въ ξ_1, τ_1, ζ_1 , причемъ:

$$\xi_1 = \xi + d\xi, \quad \tau_1 = \tau + d\tau, \quad \zeta_1 = \zeta + d\zeta;$$

или на основаніи (53):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 (1 - a dt) - p_3 \tau_1 dt - p_2 \zeta_1 dt, \\ \tau &= -\xi_1 p_3 dt + \tau_1 (1 - b dt) - \zeta_1 p_1 dt, \quad \dots \dots \dots (55) \\ \zeta &= -\xi_1 p_2 dt - \tau_1 p_1 dt + \zeta_1 (1 - c dt). \end{aligned}$$

Посмотримъ какъ расположатся точки нашей бесконечно малой сферы радиуса r послѣ деформации. Для этого возвысимъ въ квадратъ равенства (55) и сложимъ ихъ почленно. Замѣчая, что

$$\xi^2 + \tau^2 + \zeta^2 = r^2,$$

пренебрегая въ правой части бесконечно малыми выше третьяго порядка, найдемъ:

$$\begin{aligned} r^2 = \xi_1^2 (1 - 2adt) + \tau_1^2 (1 - 2bdt) + \zeta_1^2 (1 - cdt) - 4p_1 dt \zeta_1 \tau_1 - 4p_2 dt \xi_1 \zeta_1 - \\ - 4p_3 dt \xi_1 \tau_1 \dots \dots \dots (56) \end{aligned}$$

Мы видимъ, что сфера деформировалась въ поверхность второго порядка, которая должна быть эллипсоидомъ. Это вытекаетъ изъ того, что наши деформации предполагаются бесконечно-малыми; поэтому сфера должна деформироваться въ замкнутую поверхность второго порядка, которая въ общемъ случаѣ есть эллипсоидъ, называемый *эллипсоидомъ деформаций*.

Уравненіе эллипсоида деформации, отнесенное къ главнымъ осямъ будетъ:

$$\xi_1^2 (1 - 2A dt) + \tau_1^2 (1 - 2B dt) + \zeta_1^2 (1 - 2C dt) = r^2.$$

На основаніи сказаннаго относительно скорости кубического расширенія (54), можемъ написать:

$$\theta = A + B + C = a + b + c;$$

или, на основаніи обозначеній (49):

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (57)$$

Для несжимаемой жидкости послѣднее выраженіе должно обратиться въ нуль, такъ какъ для нея $\theta = 0$. Это было показано раньше, исходя изъ соображеній о сплошности движенія.

Глава IV.

Вихревое движеніе.

20. Въ настоящей главѣ мы подробнѣе остановимся на случаѣ движенія безъ потенціала скоростей, т. е. на вихревомъ движеніи. Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ выраженій (45) и (27), величины ω_1 , ω_2 , ω_3 , представляющія собой проэкции на оси координатъ вектора угловой скорости или вихря частицъ жидкости, отличны отъ нуля; другими словами частицы жидкости имѣютъ вращательное движеніе вокругъ осей, проходящихъ черезъ ихъ центры.

Составляющія вихря ω по осямъ координатъ имѣютъ видъ:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \dots \dots \dots (45) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Дифференцируя, найдемъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0. \dots \dots \dots (58)$$

Обратимся теперь къ уравненіямъ (31,а). Они имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_2 w - \omega_3 v), \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \dots \dots (31,а) \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_1 v - \omega_2 u).\end{aligned}$$

Продифференцируемъ первое уравненіе по y , второе по x и вычтемъ первый результатъ изъ второго, получимъ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2\omega_3 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \left(\omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\ &\quad - 2 \left(v \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + u \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right) + 2w \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Изъ условія сплошности для жидкости (17,а), имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial w}{\partial z};$$

кромѣ того изъ (58) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = -\frac{\partial \omega_3}{\partial z};$$

поэтому послѣднее уравненіе переписется такъ:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \omega_3}{\partial t} - u \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - w \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Замѣчая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_3}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_3}{\partial z} - \frac{\omega_3}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \\ &+ \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \frac{dz}{dt} - \frac{\omega_3}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} - \frac{\omega_3}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \end{aligned}$$

и

$$\frac{d\omega_3}{dt} - \frac{\omega_3}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d \frac{\omega_3}{\rho}}{dt},$$

получимъ окончательно:

$$\frac{d \frac{\omega_3}{\rho}}{dt} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right).$$

Поступая подобнымъ образомъ съ уравненіями (31,а) можно получить еще два аналогичныхъ уравненія. Поэтому имѣемъ:

$$\frac{d \frac{\omega_1}{\rho}}{dt} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

$$\frac{d \frac{\omega_2}{\rho}}{dt} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \quad \dots (59)$$

$$\frac{d \frac{\omega_3}{\rho}}{dt} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right).$$

Если силы на единицу массы имѣють потенциалъ, то выраженія въ скобкахъ въ правыхъ частяхъ уравненій обращаются въ нули, т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega_1}{\rho} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega_2}{\rho} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z}, \dots \dots \dots (59, a).$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega_3}{\rho} = \frac{\omega_1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\omega_2}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\omega_3}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Для несжимаемой жидкости, для которой $\rho = \text{Const.}$, эти уравненія переписуются такъ:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial v}{\partial z}, \dots \dots \dots (59, b)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Полныя производныя по времени отъ $\frac{\omega_1}{\rho}$, $\frac{\omega_2}{\rho}$, $\frac{\omega_3}{\rho}$, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (59, a), представляютъ собой измѣненія вихревыхъ составляющихъ, дѣленныхъ на плотность въ данной точкѣ, отнесенныхъ не къ точкѣ пространства, а къ элементу жидкости, перемѣщающемуся со временемъ. Поэтому, если для какого-либо момента времени, для какой-либо частицы жидкости

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

то для нея и

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega_1}{\rho} = \frac{d}{dt} \frac{\omega_2}{\rho} = \frac{d}{dt} \frac{\omega_3}{\rho} = 0,$$

т. е. если въ жидкости силы на единицу массы имѣють потенциалъ то частицы ея двигавшися съ потенциаломъ скоростей, будутъ во все время движенія обладать потенциаломъ скоростей, а частицы, пришедшя разъ во вращеніе, останутся во все время движенія вращающимися.

Это положеніе, называемое *закономъ сохраненія вихрей*, принадлежит *Гельмгольцу*, впервые установившему понятіе о вихрѣ и давшему основныя теоремы вихревого движенія.

21. Для дальнѣйшаго введемъ понятіе о *вихревой линіи* и *вихревой трубкѣ*.

Линія, проведенная для даннаго момента времени въ жидкости такъ, что касательная въ каждой точкѣ ея совпадаетъ съ векторомъ мгновенной скорости вращенія частицы жидкости, совпадающей съ этой точкой, называется *вихревой линіей*.

Если черезъ точки безконечно малаго замкнутаго контура, построеннаго для даннаго момента времени въ жидкости, провести вихревыя линіи, то въ жидкости выдѣлится *вихревая трубка*.

Черезъ каждую точку жидкости можетъ быть въ любой моментъ проведена вихревая линія; при установившемся движеніи эта линія расположена неизмѣнно въ пространствѣ, при неустановившемся—она деформируется. Тоже относится и къ вихревымъ трубкамъ.

Система дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ вихревую линію будетъ:

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3} \dots \dots \dots (60)$$

22. Докажемъ теперь три *теоремы Гельмгольца* для несжимаемой жидкости.

Возьмемъ въ жидкости двѣ безконечно близкихъ точки *A* и *B*, координаты которыхъ въ моментъ времени *t* суть *x, y, z* и *x + dx, y + dy, z + dz*.

Примемъ точку *A* за центръ, содержащаго ее, безконечно-малаго объема. Пусть точка *B* въ моментъ *t* лежитъ на оси вращенія этого объема. Слѣдовательно, разстояніе *ds* между этими точками есть элементъ вихревой линіи, проходящей въ моментъ *t* черезъ точки *A* и *B*. Для этой вихревой линіи имѣемъ:

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3} = \frac{ds}{\omega} \dots \dots \dots (60,a)$$

Для момента *t + dt* координаты точекъ *A* и *B* пусть будутъ *x', y', z'* и *x + dx', y' + dy', z + dz'*. Найдемъ:

$$x' = x + udt, \quad y' = y + vdt, \quad z' = z + wdt;$$

откуда:

$$dx' = dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) dt,$$

$$dy' = dy + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) dt,$$

$$dz' = dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dt.$$

Замѣняя въ послѣднихъ трехъ уравненіяхъ dx , dy , dz ихъ величинами изъ (60, a), найдемъ:

$$dx' = \frac{ds}{\omega} \left\{ \omega_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \omega_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \omega_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \omega_3 \right) dt \right\},$$

$$dy' = \frac{ds}{\omega} \left\{ \omega_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \omega_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \omega_2 + \frac{\partial v}{\partial z} \omega_3 \right) dt \right\},$$

$$dz' = \frac{ds}{\omega} \left\{ \omega_3 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \omega_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \omega_2 + \frac{\partial w}{\partial z} \omega_3 \right) dt \right\},$$

или, на основаніи уравненій (59, b):

$$\frac{dx'}{\omega_1 + d\omega_1} = \frac{dy'}{\omega_2 + d\omega_2} = \frac{dz'}{\omega_3 + d\omega_3} = \frac{ds}{\omega} \dots \dots \dots (61)$$

Но dx' , dy' , dz' суть проекціи на оси координатъ разстоянія ds' точекъ A и B въ ихъ новомъ положеніи, съ другой стороны $\omega_1 + d\omega_1$, $\omega_2 + d\omega_2$, $\omega_3 + d\omega_3$ суть проекціи на тѣ же оси угловой скорости $\omega_1 = \omega + d\omega$ частицы A въ ея новомъ положеніи; отсюда заключаемъ, что если двѣ бесконечно близкія точки жидкости въ какой-либо моментъ времени лежали на вихревой линіи, то въ слѣдующій моментъ, а слѣдовательно и вообще всегда, онѣ будутъ лежать на одной и той же вихревой линіи. Такъ какъ это вѣрно для произвольно взятыхъ точекъ, то отсюда и вытекаетъ *первая теорема Гельмгольца*:

Частицы жидкости, лежащія въ какой-либо моментъ времени на одной и той же вихревой линіи, двигаются, оставаясь на одной вихревой линіи. Понимать это надо такъ, что частицы, двигаясь, переходятъ одновременно съ одной вихревой линіи на другую (представляемую интегралами уравненій (59)).

На основаніи (60) и (59, a) можемъ написать:

$$\frac{ds}{\omega} = \frac{ds'}{\omega'} = \dots = c_1, \dots \dots \dots (62)$$

т. е. разстояніе между двумя бесконечно близкими точками на вихревой линіи измѣняется обратно-пропорціонально угловымъ скоростямъ вращенія.

23. Возьмемъ теперь вихревую трубку въ положеніи ея для момента t , и разобьемъ на элементы нормальными сѣченіями.

Элементы трубки будутъ мѣнять со временемъ свое положеніе и форму, но такъ какъ каждый элементъ состоитъ изъ однихъ и тѣхъ же точекъ жидкости, то объемы ихъ мѣняться не будутъ.

Обозначимъ черезъ F и ds площадь поперечнаго сѣченія трубки и длину элемента ея оси (ось—средняя вихревая линія трубки). Объемъ элемента трубки выразится произведеніемъ Fds . Такъ какъ объемъ этотъ со временемъ не мѣняется, то

$$Fds = C_2,$$

гдѣ C_2 постоянная для разсматриваемаго сѣченія трубки.

На основаніи (61) послѣднее уравненіе можетъ быть такъ переписано:

$$F\omega = C, \dots \dots \dots (63)$$

т. е. произведеніе площади поперечнаго сѣченія трубки, (проходящей черезъ тѣ же частицы) на угловую скорость со временемъ не мѣняется.

Это вторая теорема Гельмгольца.

24. Возьмемъ уравненіе (58):

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (58)$$

Помножимъ это уравненіе на элементъ объема $dx dy dz$, и проинтегрировавъ полученный результатъ, для опредѣленнаго момента времени, по какому либо объему, получимъ:

$$\iiint \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) dx dy dz = 0.$$

Разбивъ на три интеграла и произведя одно интегрированіе, найдемъ:

$$\int \int (\omega_1 dy dz + \omega_2 dx dz + \omega_3 dx dy) = 0;$$

но

$$dy dz = dS \cdot cs(n, x), \quad dx dz = dS \cdot cs(n, y), \quad dx dy = dS \cdot cs(n, z),$$

гдѣ dS элементъ поверхности, ограничивающей объемъ, по которому производится интеграція; n —внѣшняя нормаль къ ней; поэтому:

$$\int \int \left\{ \omega_1 cs(n, x) + \omega_2 cs(n, y) + \omega_3 cs(n, z) \right\} dS = 0,$$

или

$$\int \int \omega cs(\omega, n) dS = 0.$$

Примѣнимъ это уравненіе къ части силовой трубки, заключающейся между двумя произвольными нормальными сѣченіями. Площадь перваго сѣченія, гдѣ вихревыя линіи входятъ въ трубку, обозначимъ черезъ F_1 ; площадь втораго сѣченія, гдѣ онѣ выступаютъ изъ нея, назовемъ черезъ F_2 . Для всѣхъ точекъ боковой поверхности $cs(\omega, n) = 0$.

Для перваго сѣченія $dS = F_1$, $cs(\omega, n) = -1$; для втораго $dS = F_2$, $cs(\omega, n) = 1$. Слѣдовательно:

$$F_2 \omega_2 - F_1 \omega_1 = 0.$$

Отсюда вытекаетъ, что въ каждый данный моментъ произведе-
ніе площади поперечнаго сѣченія нити на скорость вращенія вдоль
всей нити одно и тоже.

Это третья теорема Гельмгольца.

Выраженіе $F\omega$ называется *напряженіемъ вихря*

Послѣднія двѣ теоремы показываютъ, что для всѣхъ частицъ,
расположенныхъ въ данный моментъ времени на какой либо вихревой
линіи, напряженіе вихря во все время движенія остается неизмѣннымъ.

Три теоремы Гельмгольца были нами доказаны для случая не-
сжимаемой жидкости, ввиду простоты доказательствъ. Эти же теоремы
могутъ быть распространены и на сжимаемыя жидкости, но ввиду
сложности доказательствъ мы здѣсь ихъ не приводимъ.

Вихревыя трубки (слѣдовательно и лініи) не могутъ начинаться
и кончаться внутри жидкости, а могутъ лишь ити отъ границы до
границы, или же образовывать замкнутые контуры.

Глава V.

Движеніе вязкихъ жидкостей.

25. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вязкихъ жидкостей. Изъ
основного опредѣленія жидкости, даннаго въ началѣ, мы видимъ, что
въ состояніи равновѣсія, касательныя напряженія, присущія вязкимъ
жидкостямъ, не должны себя проявлять; дѣйствіе ихъ должно обна-
руживаться лишь при движеніи жидкостей. Слѣдовательно, касатель-
ныя напряженія должны быть функціей скорости точекъ жидкости,
функціей обращающейся въ нуль вмѣстѣ со скоростями.

Свойство вязкости жидкости называется иногда *внутреннимъ
треніемъ* ея. Это внутреннее треніе въ основѣ отличается отъ тренія
твердыхъ тѣлъ тѣмъ, что проявляется лишь въ движеніи, — т. е. для
какихъ бы то ни было жидкостей (слѣдовательно и вязкихъ) тренія
покоя не существуетъ.

Иными словами: съ возникновеніемъ въ жидкости касательныхъ
напряженій (въ случаѣ вязкой жидкости) необходимо нарушается ея
равновѣсіе.

Подобно тому какъ это сдѣлано для идеальныхъ жидкостей, да-
димъ здѣсь выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія вязкой
жидкости. Для этого должна быть установлена связь между напряже-
ніями X_x, X_y, \dots и скоростями въ какой либо точкѣ жидкости.
Связь эта можетъ быть дана на основаніи какихъ либо болѣе или
менѣе достовѣрныхъ гипотезъ, подтвержденныхъ опытомъ.

Ньютонъ первый установилъ основные гипотетическіе законы для силъ внутренняго тренія жидкостей. Изъ этихъ законовъ слѣдуетъ, что сила внутренняго тренія:

- 1) прямо пропорціональна первой степени скорости относительнаго движенія частицъ,
- 2) прямо пропорціональна величинѣ поверхности соприкосновенія, вдоль которой происходитъ это относительное движеніе частицъ,
- 3) зависитъ отъ свойства жидкости,
- 4) не зависитъ отъ внутренняго давленія жидкости.

Вліянія температуры на силу внутренняго тренія Ньютонъ не касался.

Дальнѣйшіе изслѣдователи, какъ то *Дюбуа*, *Герстнеръ*, *Жираръ* и главнымъ образомъ *Пуазейль* нашли, что сила внутренняго тренія

- 5) уменьшается съ возвышеніемъ температуры.

Наконецъ опыты нѣкоторыхъ изслѣдователей показали, что сила внутренняго тренія

- 6) измѣняется съ увеличеніемъ давленія; для нѣкоторыхъ жидкостей возрастая (спиртъ, скипидаръ, . . .), а для другихъ убываая (вода, глицеринъ).

Главнымъ образомъ приходится считаться съ первыми четырьмя законами внутренняго тренія, данными Ньютономъ.

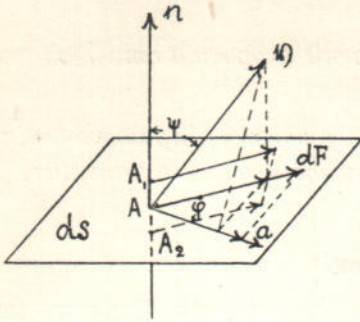
*Навье въ 1822 г.**) первый ввелъ въ дифференціальныя уравненія движенія идеальной жидкости силы внутренняго тренія, подчиняя ихъ вышеуказаннымъ четыремъ законамъ, и получилъ такимъ образомъ уравненія движенія вязкой жидкости. Къ выводу ихъ мы и приступимъ. Замѣтимъ, что условія сплошности движенія и зависимость между давленіемъ и плотностью остаются тѣми же.

Дѣйствіе вязкости выразится тѣмъ, что къ нормальному напряженію, дѣйствующему въ данной точкѣ пространства на элементарную площадку ds , произвольно расположенную въ жидкости (т. е. къ усилію— pds , если за положительное направленіе считать внѣшнюю нормаль къ разсматриваемой сторонѣ площадки), присоединяется нѣкоторое касательное напряженіе, дѣйствующее вдоль площадки въ направленіи относительной скорости движенія частицъ, расположенныхъ съ обѣихъ сторонъ ея.

26. Найдемъ аналитическое выраженіе этого касательнаго напряженія.

*) Mémoires de l'Académie des Sciences t. VII, p. 389. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides.

Возьмемъ въ жидкости какую либо площадку ds и на ней точку A (черт. 4). Пусть n будетъ нормаль въ этой точкѣ къ площадкѣ,



Черт. 4.

v —скорость въ той же точкѣ, ϕ —уголъ между v и положительнымъ направлениемъ нормали. Выберемъ на нормали двѣ бесконечно-близкія точки A_1 и A_2 такъ, чтобы $A_2A = AA_1 = \frac{dn}{2}$, лежація по обѣ стороны площадки.

Найдемъ теперь относительную скорость движенія вдоль площадки частицы A_1 по отношенію къ A_2 ; для этого мы должны составить тангенціальныя составляющія скоростей точекъ A_1 и A_2 и

вычесть одну изъ другой. Тангенціальная составляющая скорости точки A_1 — v_{1t} будетъ:

$$v_{1t} = v \sin \phi + \frac{dn}{2} \frac{dv \sin \phi}{dn} + \dots$$

аналогично для точки A_2 имѣемъ:

$$v_{2t} = v \sin \phi - \frac{dn}{2} \frac{dv \sin \phi}{dn} + \dots$$

Искомая относительная скорость получится вычитаніемъ одного выраженія изъ другого;

$$v'_t = \frac{dv \sin \phi}{dn} dn + \dots$$

v'_t можно разсматривать какъ скорость относительнаго движенія частицъ жидкости, расположенныхъ въ плоскости параллельной нашему элементу и проходящей черезъ точку A_1 , по отношенію къ частицамъ расположеннымъ въ такой же плоскости но проходящей черезъ точку A_2 . При этомъ мы предполагали, что v_{1t} параллельна v_{2t} что при малости разстоянія A_1A_2 допустимо. Обозначая черезъ v_r относительную скорость, рассчитанную на единицу разстоянія для частицъ, расположенныхъ по обѣ стороны элементарной площадки и непосредственно на ней лежащихъ (т. е. со стороны положительной нормали и ей противоположной стороны), принимая въ предѣлѣ $dn = 0$, найдемъ:

$$v_r = \lim \frac{v'_t}{dn} = \frac{dv \sin \phi}{dn}, \dots \dots \dots (64)$$

или такъ

$$v_r = \frac{dv_t}{dn}, \dots \dots \dots (64, a)$$

гдѣ v_t — составляющая скорости по элементу площадки.

Сила внутренняго тренія, дѣйствующая на элементарной площадкѣ ds со стороны частицъ жидкости, лежащихъ на положительной сторонѣ площадки на частицы, лежащія на отрицательной сторонѣ можетъ быть выражена (по законамъ тренія Ньютона) такъ:

$$dF = \mu \frac{dv_t}{dn} ds. \dots \dots \dots (65)$$

Здѣсь μ называется *коэффициентомъ вязкости*, или *коэффициентомъ внутренняго тренія жидкости*.

Возьмемъ на нашей площадкѣ какое либо направление a и найдемъ проэцію силы тренія dF на это направление. Обозначая эту проэцію черезъ dF_a , уголъ между a и v_t черезъ φ , можемъ написать:

$$dF_a = dF \cos \varphi = \mu \frac{dv_t}{dn} ds \cos \varphi = \mu \frac{dv_t \cos \varphi}{dn} ds,$$

замѣчая, что:

$$v_t \cos \varphi = v \cos(v, a),$$

находимъ:

$$dF_a = \mu \frac{d[v \cos(v, a)]}{dn} ds \dots \dots \dots (65, a)$$

Мы видимъ, что μ есть не что иное, какъ коэффициентъ сдвига для жидкаго тѣла.

Г л а в а VI.

Связь между касательными напряжениями и деформациями.

27. Обратимся теперь къ уравненіямъ (14), переписаннымъ въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right), \dots \dots \dots (14, a) \\ \frac{dw}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Посмотримъ, какъ выразятся для вязкой жидкости напряжения $X_x, X_y, \dots \dots Y_x, \dots \dots$ черезъ величины, управляющія деформациями, т. е. черезъ u, v, w .

Касательныя напряжения:

$$X_y, Y_z, Z_x,$$

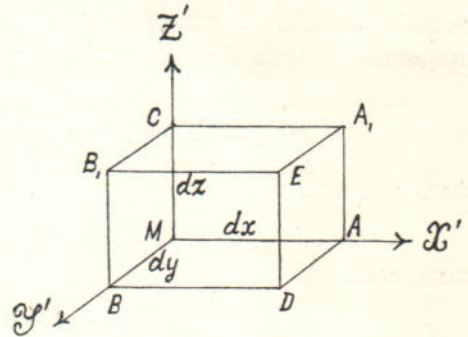
и соответственно равны имъ

$$Y_x, Z_y, X_z,$$

найдутся непосредственно на основаніи законовъ Ньютона. Для этого обратимся къ нашему элементарному параллелепипеду, которымъ мы пользовались при выводѣ уравненій (14) (черт. 5).

Напряжение X_y или равное ему Y_x получится, пользуясь формулой (65, a), исходя изъ слѣдующаго разсужденія: на площадку MCA_1A , равную по величинѣ $dx dz$, въ направленіи оси X дѣйствуетъ, на основаніи вышеуказанной формулы, касательная сила:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} dx dy,$$



Черт. 5.

или напряжение

$$X'_y = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

На томъ же основаніи, для площадки MCB_1B найдемъ въ направленіи оси Y напряжение

$$Y''_x = \mu \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но для всякаго касательнаго напряжения Y''_x , какъ показано раньше, имѣется ему равное напряжение X''_y , дѣйствующее на площадку MCA_1A въ направленіи оси X , поэтому искомое напряжение X_y представится въ такомъ видѣ:

$$X_y = X'_y + X''_y$$

или такъ:

$$X_y = Y_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Подобнымъ образомъ для нахождения напряжения Y_z (или что тоже Z_y) разсматриваемъ площадку $BMAD$ и MCA_1A . На первую, въ направленіи оси Y дѣйствуетъ касательное напряжение

$$Y'_z = \mu \frac{\partial v}{\partial z},$$

на вторую, въ направленіи оси Z , касательное напряженіе:

$$Z''_y = \mu \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Замѣчая, что $Z''_y = Y''_z$, какъ въ предыдущемъ случаѣ, имѣемъ:

$$Y_z = Y'_z + Y''_z$$

или

$$Y_z = Z_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Такимъ же способомъ, рассматривая площадки $BMAD$ и $BMCB_1$, и касательныя напряженія, дѣйствующія на нихъ соотвѣтственно въ направленіяхъ осей X и Z , найдемъ:

$$Z_x = X_z = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Итакъ для касательныхъ напряженій, дѣйствующихъ на грани рассматриваемаго параллелоипеда, имѣемъ выраженія:

$$Y_z = Z_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$X_z = Z_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \dots \dots \dots (66)$$

$$X_y = Y_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

Обращаясь къ обозначеніямъ (49) и полагая:

$$Y_z = Z_y = T_x, \quad X_z = Z_x = T_y, \quad X_y = Y_x = T_z, \quad \dots \dots \dots (67)$$

можемъ равенства (66) представить въ такомъ видѣ:

$$T_x = 2\mu p_1, \quad T_y = 2\mu p_2, \quad T_z = 2\mu p_3 \dots \dots \dots (68)$$

Намъ нужно найти еще выраженія для нормальныхъ напряженій:

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z,$$

черезъ деформаци; но, какъ оказывается, для этой цѣли однихъ законовъ Ньютона не достаточно; необходимы болѣе общія соображенія изъ теоріи упругости, рѣшающей этотъ вопросъ въ окончательномъ видѣ.

Зависимости между проекціями скоростей деформаций на оси двух системъ координатъ. Тоже для напряженій.

28. Введемъ предварительно нѣкоторыя обозначенія. Пусть точки элемента жидкости, съ центромъ тяжести O , отнесены сперва къ прямоугольной системѣ, координатъ X, Y, Z , а затѣмъ къ системѣ X', Y', Z' . Для нормальныхъ напряженій въ точкѣ O на координатныя плоскости въ первой системѣ введемъ обозначенія (взамѣнъ прежнихъ X_x, Y_y, Z_z):

$$N_x, N_y, N_z, \dots \dots \dots (69)$$

а во второй системѣ:

$$N'_x, N'_y, N'_z, \dots \dots \dots (69, a)$$

Точно также, на основаніи (68) примемъ обозначенія:

$$T_x, T_y, T_z, \text{ и } T'_x, T'_y, T'_z, \dots \dots \dots (70)$$

Косинусы угловъ осей второй системы съ первой будутъ опредѣляться изъ слѣдующей таблички:

	X	Y	Z	
X'	l_x	m_x	n_x (71)
Y'	l_y	m_y	n_y	
Z'	l_z	m_z	n_z	

причемъ имѣютъ мѣсто слѣдующія шесть условий:

$$\begin{aligned}
 l_x^2 + m_x^2 + n_x^2 &= 1, & l_x l_y + m_x m_y + n_x n_y &= 0, \\
 l_y^2 + m_y^2 + n_y^2 &= 1, & l_x l_z + m_x m_z + n_x n_z &= 0, \dots \dots (72) \\
 l_z^2 + m_z^2 + n_z^2 &= 1, & l_y l_z + m_y m_z + n_y n_z &= 0.
 \end{aligned}$$

Координаты какой либо точки преобразуются по слѣдующимъ формуламъ:

$$\begin{aligned}
 x' &= l_x x + m_x y + n_x z, \\
 y' &= l_y x + m_y y + n_y z, \dots \dots \dots (73) \\
 z' &= l_z x + m_z y + n_z z.
 \end{aligned}$$

Для проєкцій скоростей на указаннныя оси имѣемъ такія соотношенія:

$$\begin{aligned} u &= l_x u' + l_y v' + l_z w' \\ v &= m_x u' + m_y v' + m_z w', \quad \dots \dots \dots (74) \\ w &= n_x u' + n_y v' + n_z w'. \end{aligned}$$

Замѣтимъ здѣсь, что для какой либо функціи $f(x, y, z)$, мы можемъ написать:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x},$$

или, на основаніи (73), присоединяя сюда частныя производныя по y и z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x'} l_x + \frac{\partial f}{\partial y'} l_y + \frac{\partial f}{\partial z'} l_z, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x'} m_x + \frac{\partial f}{\partial y'} m_y + \frac{\partial f}{\partial z'} m_z, \quad \dots \dots \dots (75) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x'} n_x + \frac{\partial f}{\partial y'} n_y + \frac{\partial f}{\partial z'} n_z \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь (74), найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} l_x + \frac{\partial v'}{\partial x'} l_x l_y + \frac{\partial w'}{\partial x'} l_x l_z + \frac{\partial u'}{\partial y'} l_x l_y + \frac{\partial v'}{\partial y'} l_y^2 + \\ &\quad \frac{\partial w'}{\partial y'} l_y l_z + \frac{\partial u'}{\partial z'} l_x l_z + \frac{\partial v'}{\partial z'} l_y l_z + \frac{\partial w'}{\partial z'} l_z^2. \end{aligned}$$

Аналогичныя выраженія мы получимъ для $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$. Дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ и обращаясь къ обозначеніямъ (49), можемъ написать:

$$\begin{aligned} a &= a' l_x^2 + b' l_y^2 + c' l_z^2 + 2p'_1 l_y l_z + 2p'_2 l_x l_z + 2p'_3 l_x l_y, \\ b &= a' m_x^2 + b' m_y^2 + c' m_z^2 + 2p'_1 m_y m_z + 2p'_2 m_x m_z + 2p'_3 m_x m_y, \quad \dots (76) \\ c &= a' n_x^2 + b' n_y^2 + c' n_z^2 + 2p'_1 n_y n_z + 2p'_2 n_x n_z + 2p'_3 n_x n_y. \end{aligned}$$

Подобнымъ образомъ можно дифференцированіемъ уравненій (74) и сложеніемъ получить выраженія для p_1 , p_2 и p_3 . Послѣ простыхъ передѣлокъ найдемъ:

$$\begin{aligned} p_1 &= a' m_x n_x + b' m_y n_y + c' m_z n_z + p'_1 (m_y n_z + m_z n_y) + p'_2 (m_x n_z + m_z n_x) + \\ &\quad + p'_3 (m_x n_y + m_y n_x), \\ p_2 &= a' l_x n_x + b' l_y n_y + c' l_z n_z + p'_1 (l_y n_z + l_z n_y) + p'_2 (l_x n_z + l_z n_x) + \\ &\quad + p'_3 (l_x n_y + l_y n_x), \quad \dots \dots \dots (77) \\ p_3 &= a' l_x m_x + b' l_y m_y + c' l_z m_z + p'_1 (l_y m_z + l_z m_y) + p'_2 (l_x m_z + l_z m_x) + \\ &\quad + p'_3 (l_x m_y + l_y m_x). \end{aligned}$$

Формулы (76) и (77) представляют весьма важные зависимости между скоростями деформаций по отношению къ какимъ либо двумъ системъ координатъ,

Для получения зависимостей $a', b', c', p'_1, p'_2, p'_3$ отъ a, b, c, p_1, p_2, p_3 достаточно въ (71) горизонтальныя строки косинусовъ замѣнить вертикальными и на основаніи этой подстановки измѣнить косинусы въ (76) и (77), переставивъ значки у вышеуказанныхъ скоростей деформаций.

Складывая равенства (76), и пользуясь зависимостями (72), найдемъ:

$$a + b + c = a' + b' + c', \dots \dots \dots (78)$$

или, на основаніи обозначеній (49):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}, \dots \dots \dots (78,a)$$

что представляетъ собой нѣкоторую инвариатную зависимость, имѣющую, на основаніи (57), вполне определенное физическое толкованіе: скорость объемнаго расширенія въ какой либо точкѣ сплошно-деформирующагося тѣла не зависитъ отъ системы координатъ къ которой отнесена частица тѣла въ этой точкѣ.

29. Найдемъ теперь зависимости, между напряжениями $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ и $N'_x, N'_y, N'_z, T'_x, T'_y, T'_z$.

Проекціи на оси X', Y', Z' напряжения на площадку, лежащую въ плоскости YOZ , на основаніи выраженій (6), пользуясь (71), будутъ:

$$\begin{aligned} X' &= N'_x l_x + T'_z l_y + T'_y l_z, \\ Y' &= T'_z l_x + N'_y l_y + T'_x l_z, \dots \dots \dots (79) \\ Z' &= T'_y l_x + T'_x l_y + N'_z l_z. \end{aligned}$$

Для получения N_x , т. е. проекцій этого напряжения на ось X , нужно полученныя выраженія помножить соответственно на l_x, l_y, l_z , и сложить; найдемъ:

$$N_x = N'_x l_x^2 + N'_y l_y^2 + N'_z l_z^2 + 2 T'_z l_x l_y + 2 T'_y l_x l_z + 2 T'_x l_y l_z.$$

Подобнымъ образомъ для нахождения проекціи того же напряжения на ось Y , т. е. T_z нужно выраженіе (79) помножить соответственно на m_x, m_y, m_z , и сложить; помножая, наконецъ, тѣ же выраженія на n_x, n_y, n_z , и складывая найдемъ T_y . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} T_z &= N'_x l_x m_x + N'_y l_y m_y + N'_z l_z m_z + T'_x (l_z m_y + l_y m_z) + \\ &+ T'_y (l_z m_x + l_x m_z) + T'_z (l_x m_y + l_y m_x), \end{aligned}$$

$$T_y = N'_x l_x n_x + N'_y l_y n_y + N'_z l_z n_z + T'_x (l_z n_y + l_y n_z) + \\ + T'_y (l_x n_z + l_z n_x) + T'_z (l_x n_y + l_y n_x).$$

Примѣняя тѣ же соображенія къ напряжениямъ, дѣйствующимъ на площадки XOZ и YOZ , можемъ въ результатѣ дать слѣдующія шесть зависимостей между проэкціями напряженій на оси X, Y, Z и X', Y', Z' :

$$N_x = N'_x l_x^2 + N'_y l_y^2 + N'_z l_z^2 + 2T'_z l_x l_y + 2T'_y l_x l_z + 2T'_x l_y l_z, \\ N_y = N'_x m_x^2 + N'_y m_y^2 + N'_z m_z^2 + 2T'_z m_x m_y + 2T'_y m_x m_z + 2T'_x m_y m_z, \\ N_z = N'_x n_x^2 + N'_y n_y^2 + N'_z n_z^2 + 2T'_z n_x n_y + 2T'_y n_x n_z + 2T'_x n_y n_z, \quad (80)$$

$$T_x = N'_x m_x n_x + N'_y m_y n_y + N'_z m_z n_z + T'_x (m_y n_z + m_z n_y) + T'_y (m_z n_x + \\ + m_x n_z) + T'_z (m_x n_y + m_y n_x),$$

$$T_y = N'_x l_x n_x + N'_y l_y n_y + N'_z l_z n_z + T'_x (l_z n_y + l_y n_z) + T'_y (l_x n_z + l_z n_x) + \\ + T'_z (l_x n_y + l_y n_x),$$

$$T_z = N'_x l_x m_x + N'_y l_y m_y + N'_z l_z m_z + T'_x (l_z m_y + l_y m_z) + T'_y (l_z m_x + \\ + l_x m_z) + T'_z (l_x m_y + l_y m_y).$$

Зависимости $N'_x, N'_y, N'_z, T'_x, T'_y, T'_z$, отъ $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$, находятся также какъ и зависимости a', b', \dots и т. отъ a, b, \dots и т. д.

Складывая первыя три зависимости изъ (80), на основаніи (72), можемъ написать:

$$N_x + N_y + N_z = N'_x + N'_y + N'_z, \dots \dots \dots (81)$$

т. е. *сумма нормальныхъ напряженій на три взаимно-перпендикулярныхъ площадки въ какой-либо точкѣ сплошно-деформирующагося тѣла, не зависитъ отъ ихъ положенія въ пространствѣ.*

Связь между напряжениями и деформациями.

30. Для установленія зависимости напряженій отъ деформаций приходится прибѣгнуть къ какой либо гипотезѣ. Этой гипотезой является обобщеніе закона *Гука*, утверждающаго что:

для всякой сплошно-деформирующейся среды, въ которой внѣшнія силы производятъ безконечно малыя деформации, напряжения пропорціональны деформациямъ.

Обобщая, мы примемъ, что при тѣхъ же условіяхъ, напряжения суть линейныя функціи шести деформаций по осямъ: $adt, bdt, cdt, p_1 dt, p_2 dt, p_3 dt$.

Для жидкостей, какъ видимъ, эти деформации пропорціональны скоростямъ деформаций; поэтому первыя могутъ быть замѣнены вторыми. Кромѣ того, нормальныя напряжения N_x, N_y, N_z должны имѣть видъ:

$$\begin{aligned} N_x &= -p + F_1, & T_x &= \Theta_1, \\ N_y &= -p + F_2, & T_y &= \Theta_2, \dots \dots \dots (82) \\ N_z &= -p + F_3, & T_z &= \Theta_3, \end{aligned}$$

гдѣ p нѣкоторая функція координатъ и времени, а $F_1, F_2, F_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ однородныя линейныя функціи шести скоростей деформаций.

Дѣйствительно, выраженія для нормальныхъ напряженій должны имѣть видъ, примѣнимый для всѣхъ частныхъ случаевъ покоя и движенія. Для состоянія покоя скорости деформаций обращаются вмѣстѣ со скоростями въ нуль, а нормальныя напряжения N_x, N_y, N_z обращаются въ гидростатическое давленіе въ данной точкѣ. Касательныя напряжения T_x, T_y, T_z для покоя должны быть нулями.

Этимъ условіямъ выраженія (82) удовлетворяютъ, поэтому шесть напряженій въ данной точкѣ жидкости могутъ быть выражены черезъ шесть скоростей деформации a, b, c, p_1, p_2, p_3 такъ:

$$\begin{aligned} N_x &= -p + A_{11}a + A_{12}b + A_{13}c + A_{14}p_1 + A_{15}p_2 + A_{16}p_3, \\ N_y &= -p + A_{21}a + A_{22}b + A_{23}c + A_{24}p_1 + A_{25}p_2 + A_{26}p_3, \\ N_z &= -p + A_{31}a + A_{32}b + A_{33}c + A_{34}p_1 + A_{35}p_2 + A_{36}p_3, \\ T_x &= A_{41}a + A_{42}b + A_{43}c + A_{44}p_1 + A_{45}p_2 + A_{46}p_3, \\ T_y &= A_{51}a + A_{52}b + A_{53}c + A_{54}p_1 + A_{55}p_2 + A_{56}p_3, \\ T_z &= A_{61}a + A_{62}b + A_{63}c + A_{64}p_1 + A_{65}p_2 + A_{66}p_3. \end{aligned} \dots (83)$$

Мы видимъ, что въ написанныя зависимости вошло 36 коэффициентовъ, называемыхъ коэффициентами упругости въ данной точкѣ упругаго тѣла (въ нашемъ случаѣ жидкости).

Если коэффициенты A суть числа постоянныя, не зависящія отъ координатъ точекъ тѣла, то тѣло называется однороднымъ.

Для разныхъ частныхъ случаевъ число коэффициентовъ упругости можетъ быть и меньше.

Имѣя зависимости (83), мы можемъ найти связь между напряжениями и деформациями для любой системы прямоугольныхъ координатъ въ данной точкѣ тѣла. Для этого помощью зависимостей (76), (77) и (80) исключаемъ изъ (83) $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, a, b, c, p_1, p_2, p_3$. Изъ полученной системы шести уравненій первой степени относительно $N'_x, N'_y, N'_z, T'_x, T'_y, T'_z$ эти напряжения опредѣляются какъ

линейныя функціи деформаций $a', b', c', p'_1, p'_2, p'_3$. Коэффициенты въ этихъ новыхъ линейныхъ функціяхъ будутъ отличаться отъ коэффициентовъ въ (83); въ выраженіяхъ же для N'_x, N'_y, N'_z , какъ легко показать, появятся члены $-p$. Другими словами въ общемъ случаѣ коэффициенты упругости зависятъ отъ направленій осей деформаций (осей координатной системы), т. е. упругія свойства тѣла въ данной точкѣ различны въ разныхъ направленіяхъ. Такія тѣла называются *анизотропными*.

Въ отличіе отъ анизотропныхъ тѣлъ, *изотропными* называются такія въ которыхъ упругія свойства въ данной точкѣ одинаковы по всѣмъ направленіямъ.

Аналитическимъ условіемъ изотропіи будетъ независимость коэффициентовъ A отъ координатной системы, т. е. инвариатность формуль (83). Для этого случая число коэффициентовъ получается значительно меньше, такъ какъ между ними устанавливаются зависимости, получающіяся сравненіемъ новыхъ коэффициентовъ съ прежними.

Рѣшеніе вопроса въ общемъ видѣ чрезчуръ громоздко; указанная зависимости найдутся исходя изъ нѣкоторыхъ частныхъ расположеній новой координатной системы X', Y', Z' по отношенію къ прежней X, Y, Z .

Положимъ, что ось X' прямо противоположна оси X , а оси Y' и Z' совпадаютъ съ осями Y и Z .

Для этого случая косинусы въ (71) примутъ слѣдующія частныя значенія:

$$l_x = -1, m_x = 0, n_x = 0; l_y = 0, m_y = 1, n_y = 0; l_z = 0, m_z = 0, n_z = 1.$$

Изъ зависимостей (76), (77) и (80) найдемъ:

$$a = a', b = b', c = c'; p_1 = p'_1, p_2 = -p'_2, p_3 = -p'_3;$$

$$N_x = N'_x, N_y = N'_y, N_z = N'_z; T_x = T'_x, T_y = -T'_y, T_z = -T'_z.$$

Подставляя всѣ эти значенія въ (83), получимъ для ихъ инвариатности слѣдующія условія:

$$A_{15} = A_{16} = A_{25} = A_{26} = A_{35} = A_{36} = A_{45} = A_{46} = A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{54} = \\ = A_{61} = A_{62} = A_{63} = A_{64} = 0 \dots \dots \dots (84).$$

Если принять, что ось Y' прямо противоположна Y , а оси X' и Z' совпадаютъ съ осями X и Z , то для вышеприведенныхъ девяти косинусовъ получимъ значенія:

$$l_x = 1, m_x = 0, n_x = 0; l_y = 0, m_y = -1, n_y = 0; l_z = 0, m_z = 0, n_z = 1;$$

а потому

$$a = a', b = b', c = c'; p_1 = -p_1', p_2 = p_2', p_3 = -p_3';$$

$$N_x = N'_x, N_y = N'_y, N_z = N'_z; T_x = -T'_x, T_y = T'_y, T_z = -T'_z.$$

Подставка въ (83) дасть для инвариантности слѣдующія дополнителныя условія:

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{56} = A_{65} = 0 \dots (84, a).$$

Если ось Y' совпадаетъ съ осью Z , ось Z' съ осью Y и ось X' съ осью X , то косинусы получаютъ слѣдующія значенія:

$$l_x = 1, m_x = 0, n_x = 0; l_y = 0, m_y = 0, n_y = 1; l_z = 0, m_z = 1, n_z = 0;$$

откуда

$$a = a', b = c', c = b'; p_1 = p_1', p_2 = p_3', p_3 = p_2';$$

$$N_x = N'_x, N_y = N'_z, N_z = N'_y; T_x = T'_x, T_y = T'_z, T_z = T'_y.$$

Подставляя эти значенія въ (83), дополнимъ условія инвариантности слѣдующими:

$$A_{12} = A_{13}, A_{21} = A_{31}, A_{22} = A_{33}, A_{23} = A_{32}, A_{55} = A_{66} \dots (84, b)$$

Примемъ наконецъ, что ось X' совпадаетъ съ осью Z , ось Z' съ осью X , а ось Y' съ осью Y . Въ такомъ случаѣ для косинусовъ получатся такія значенія:

$$l_x = 0, m_x = 0, n_x = 1; l_y = 0, m_y = 1, n_y = 0; l_z = 1, m_z = 0, n_z = 0.$$

Слѣдовательно:

$$a = c', b = b', c = x'; p_1 = p_3', p_2 = p_2', p_3 = p_1';$$

$$N_x = N'_z, N_y = N'_y, N_z = N'_x; T_x = T'_z, T_y = T'_y, T_z = T'_x.$$

Подстановка въ (83) дополнитъ, наконецъ, условія инвариантности слѣдующими:

$$A_{11} = A_{33}, A_{12} = A_{32}, A_{13} = A_{31}, A_{21} = A_{23}, A_{44} = A_{66} \dots (84, c)$$

Сводя условія (84), (84, a), (84, b) (84, c), найдемъ что

$$A_{21} = A_{22} = A_{33} = A,$$

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = A_{21} = A_{31} = A_{32} = B, \dots (85)$$

$$A_{44} = A_{55} = A_{66} = C,$$

т. е. 36 коэффициентовъ упругости свелись для однороднаго изотропнаго тѣла къ тремъ. Зависимости (83) переписутся такъ:

$$N_x = -p + Aa + B(b + c),$$

$$N_y = -p + Ab + B(a + c),$$

$$N_z = -p + Ac + B(a + b),$$

$$T_x = Cp_1, T_y = Cp_2, T_z = Cp_3.$$

..... (86)

Полученныя выраженія для шести напряженій показываютъ, что нормальныя напряжения зависятъ лишь отъ коэффициентовъ скоростей удлиненія по координатнымъ осямъ, а тангенціальныя напряжения—отъ коэффициентовъ скоростей перекашивания угловъ между ними.

Кромѣ того, для главныхъ осей деформации, для которыхъ

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0,$$

и

$$T_x = T_y = T_z = 0,$$

т. е. въ однородномъ изотропномъ тѣлѣ (въ нашемъ случаѣ—жидкости) главные оси деформации совпадаютъ съ главными осями напряженій.

Нѣкоторые авторы*) принимаютъ это свойство какъ одну изъ гипотезъ, опредѣляющихъ однородное изотропное тѣло; между тѣмъ данный выше выводъ показываетъ, что оно есть аналитическое слѣдствие инвариатности выраженій (83) при преобразованіяхъ по формуламъ (76), (77), (80).

Сравнивая съ (68), можемъ положить:

$$C = 2\mu.$$

Мы видимъ, что гипотеза Ньютона и позднѣйшія гипотезы даютъ для касательныхъ напряженій въ изотропномъ тѣлѣ одни и тѣ-же выраженія.

Здѣсь будетъ умѣстно обратить вниманіе на структуру коэффициента внутренняго тренія μ . Дѣло въ томъ, что основная формула (65)

$$dF = \mu \frac{dv_t}{dn} ds, \dots \dots \dots (65).$$

изъ которой получена формула (65,а), а изъ нея и основныя выраженія для касательныхъ напряженій (66) по своему построению прямо не соотвѣтствуютъ гипотезѣ Ньютона; по этой гипотезѣ *касательное усиліе*, дѣйствующее на элементарную площадку ds , должно быть

*) См.: M. Brillouin, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Paris, 1907, стр. 28, § 23.
С. П. Тимошенко, Курсъ теоріи упругости. Часть I. Кіевъ, 1909, стр. 52, 53. § 14.
Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von I. Friedel. Leipzig, 1907, стр. 659, § 312.
G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig, 1877, стр. 121, § 7.
Г. Суслевъ. Теорія потенціала и гидродинамика. Томъ II. Кіевъ. 1910, стр. 184, § 156.

пропорціонально ds и относительной скорости dv_t безконечно близкихъ частицъ A_1 и A_2 (черт. 4 стр. 38), т. е.

$$dF = \mu' dv_t ds,$$

а *напряженіе* въ точкѣ A на разсматриваемую площадку будетъ:

$$F_A = \frac{dF}{ds} = \mu' dv_t.$$

Напряженіе F_A для вязкой жидкости должно быть величиной конечной, а такъ какъ dv_t въ сплошномъ, непрерывномъ движеніи есть величина безконечно малая (стремящаяся въ предѣлѣ къ нулю), то μ' получается безконечно большой величиной, утрачивающей физическій смыслъ. Поэтому мы переписываемъ F_A въ такомъ видѣ:

$$F_A = \mu' dn \frac{dv_t}{dn},$$

гдѣ dn безконечно малая величина (элементъ нормали); здѣсь уже $\frac{dv_t}{dn}$ конечная величина, а $\mu' dn$ — произведеніе безконечно большой на безконечно малую величину должно обратиться въ конечную величину μ , т. е.

$$\mu' dn = \mu.$$

Мы видимъ, что введенный такимъ образомъ коэффициентъ μ , даетъ возможность утверждать, что выраженіе (65) для касательнаго усилія соотвѣтствуетъ гипотезѣ Ньютона о внутреннемъ треніи жидкости *).

Выраженія (86) могутъ быть переписаны въ такомъ видѣ:

$$N_x = -p + A(a + b + c) + (A - B)a,$$

$$N_y = -p + A(a + b + c) + (A - B)b, \quad \dots \dots (86, a)$$

$$N_z = -p + A(b + b + c) + (A - B)c,$$

$$T_x = 2\mu p_1, \quad T_y = 2\mu p_2, \quad T_z = 2\mu p_3.$$

Коэффициентъ A , считается, нѣкоторыми авторами, вторымъ коэффициентомъ вязкости. Онъ характеризуетъ собой явленія, сопровождающія деформацию сжатія и расширенія; и требуетъ чтобы $\theta \geq 0$.

32. Между коэффициентами A , B и μ можетъ быть установлена еще одна зависимость, исходя изъ слѣдующихъ соображеній:

*) См. О. Е. Meyer, Crelle's Journal. Т. 59, стр. 229, 1861 г.

Возьмемъ, напримѣръ, выраженіе для N_x . Если пожелаемъ выразить N_x черезъ скорости деформации по осямъ X', Y', Z' , т. е. черезъ $a', b', c', p'_1, p'_2, p'_3$, то это можетъ быть сдѣлано двоякимъ путемъ. Можно въ (86, a) вмѣсто a, b, c , подставить ихъ выраженія изъ (76), получимъ:

$$N_x = -p + A(a' + b' + c') + (A - B)(a'l_x^2 + b'l_y^2 + c'l_z^2) + 2(A - B)(p'_1 l_y l_z + p'_2 l_x l_z + p'_3 l_x l_y).$$

Съ другой стороны, пользуясь зависимостями (80) и подставляя въ нихъ N'_x, N'_y и т. д. изъ (86, a) (замѣнивъ соотвѣтственно a, b и т. д. на a', b' и т. д.), найдемъ:

$$N_x = -p + A(a' + b' + c') + (A - B)(al_x^2 + bl_y^2 + cl_z^2) + 4\mu(p'_1 l_y l_z + p'_2 l_x l_z + p'_3 l_x l_y).$$

Такъ какъ эти выраженія для N_x должны быть тождественны, то:

$$A - B = 2\mu, \dots \dots \dots (87)$$

На основаніи этого, замѣняя A черезъ λ , напишемъ:

$$\begin{aligned} N_x &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu a, \\ N_y \lambda &= -p + (a + b + c) + 2\mu b, \dots \dots \dots (88) \\ N_z &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu c, \\ T_x &= 2\mu p_1, \quad T_y = 2\mu p_2, \quad T_z = 2\mu p_3. \end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости, на основаніи (17, b), (49) и (57) имѣемъ:

$$\theta = a + b + c = 0,$$

или

$$\begin{aligned} N_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & T_x &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ N_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & T_y &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \dots \dots \dots (88, a) \\ N_z &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & T_z &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Мы видимъ, что напряженія въ вязкой, изотропной, однородной и несжимаемой жидкости зависятъ отъ одного лишь коэффициента внутренняго тренія μ .

Но и для сжимаемой жидкости можно дать зависимость между λ и μ , и такимъ образомъ исключить λ изъ выраженій (88).

Для этого воспользуемся гипотезой *Стокса**), предложенной имъ для упругихъ жидкостей, но выраженной въ нѣсколько иной формѣ. Она состоитъ въ слѣдующемъ:

Если вязкая, упругая, изотропная, однородная жидкость расширяется (или сжимается) равномерно, то во всехъ точкахъ ея нормальныя напряженія на площадку подчиняются законамъ гидростатики, т. е. равны между собой и равны давленію— p .

Обращаемся теперь къ зависимостямъ (88), и замѣчая, что для равномерной деформации

$$a = b = c,$$

кромѣ того, по предположенію,

$$N_x = N_y = N_z = -p,$$

найдемъ изъ (88), что

$$3\lambda + 2\mu = 0, \text{ или } \lambda = -\frac{2}{3}\mu.$$

Откуда, пользуясь обозначеніями (57) и (49):

$$N_x = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$N_y = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$N_z = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

..... (88,b)

$$T_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$T_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$T_z = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

*) См. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. Math. and Phys. Papers by Stokes. T. 1, стр. 87.

Для (88, a) и для послѣднихъ зависимостей находимъ:

$$N_x + N_y + N_z = -3p \dots \dots \dots (89)$$

т. е. давленіе— p есть среднее ариѳметическое изъ нормальныхъ напряженій на три взаимно перпендикулярныхъ площадки.

Это вообще вѣрно для несжимаемыхъ жидкостей, а для сжимаемыхъ—въ предположеніи гипотезы Стокса.

Глава VII.

Дифференціальныя уравненія движенія вязкой жидкости. Условія на границахъ.

33. На основаніи найденныхъ въ предыдущей главѣ выраженій для напряженій, дѣйствующихъ на грани элементарнаго параллелепипеда, мы можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія вязкой жидкости.

Для этого въ общія уравненія (14, a), пользуясь обозначеніями (66) и (67), подставляемъ вмѣсто X_x, X_y и т. д. ихъ выраженія изъ (88), причемъ величинамъ a, b и т. д. даемъ ихъ значенія (49).

Такимъ образомъ первое уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Легко замѣтить, что послѣднее уравненіе можетъ быть такъ переписано:

$$\frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\};$$

или, пользуясь (57):

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 u,$$

гдѣ Δ^2 извѣстный символъ Лагранжа:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Аналогичные результаты мы получимъ для двухъ другихъ уравненій. Поэтому, на основаніи (14), дифференціальныя уравненія движенія вязкой жидкости напишутся такъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 v, \quad (90) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 w. \end{aligned}$$

Возвращаясь къ гипотезѣ Стокса, по которой

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu,$$

можемъ наши уравненія представить въ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 v, \quad (90, a) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 w. \end{aligned}$$

Для несжимаемыхъ жидкостей, т. е. при условіи

$$\theta = 0,$$

получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 v, \quad \dots \quad (90, b) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta^2 w. \end{aligned}$$

Мы видимъ, что въ двухъ послѣднихъ случаяхъ коэффициентъ вязкости μ не входитъ прямо, а въ видѣ $\frac{\mu}{\rho}$. Обозначая

$$\frac{\mu}{\rho} = k, \quad \dots \quad (91)$$

будемъ въ дальнѣйшемъ пользоваться этимъ коэффициентомъ. По Максвеллу k называется *кинематическимъ коэффициентомъ вязкости* или *кинематическимъ коэффициентомъ внутренняго тренія*.

Замѣтимъ здѣсь, что уравненія въ видѣ (90,a) и (90,b) найдены впервые Стоксомъ и даны имъ въ статьѣ, указанной въ предыдущемъ параграфѣ.

Сравнивая уравненія (18) съ уравненіями (90) можемъ сказать, что сжимаемость и вязкость вводятъ въ дифференціальныя уравненія движенія идеальной жидкости новыя силы на единицу массы. Сжимаемость даетъ силу, проекціи которой на оси координатъ будутъ:

$$\frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \dots \quad (92)$$

а составляющія по осямъ координатъ силы отъ вязкости имѣютъ видъ:

$$k\Delta^2 u, \quad k\Delta^2 v, \quad k\Delta^2 w \quad \dots \quad (93)$$

Для несжимаемой жидкости, т. е. при $\theta = 0$, составляющими добавочной силы на единицу массы будутъ лишь послѣднія силы.

34. Уравненіямъ движенія вязкой сжимаемой жидкости (90) легко придать видъ (90,b), соответствующій случаю несжимаемой жидкости, вводя функцію P_1 , гдѣ:

$$P_1 = p - (\lambda + \mu) \theta; \quad \dots \quad (94)$$

получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial x} + k\Delta^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial y} + k\Delta^2 v, \quad \dots \quad (90,c) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial z} + k\Delta^2 w. \end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости мы имѣли, на основаніи (19), что

$$\rho = f(p), \quad \dots \quad (19)$$

отсюда:

$$p = \varphi(\rho);$$

присоединяя сюда условія сплошности (17,a) въ видѣ:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\theta = 0,$$

или

$$\frac{d \lg \rho}{dt} + \theta = 0, \quad \dots \quad (17,a)$$

и подставляя въ (94), найдемъ:

$$P_1 = \varphi(\rho) + (\lambda + \mu) \frac{d \lg \rho}{dt} \quad \dots \quad (95)$$

Изъ этого дифференціального уравненія находится зависимость

$$\rho = f_1(P_1 t), \dots \dots \dots (96)$$

аналогичная зависимости (19).

P_1 можно назвать *обобщеннымъ давленіемъ*.

Обращаемъ здѣсь вниманіе еще на одно обстоятельство. Въ самомъ началѣ (гл. I, § 1) было дано опредѣленіе идеальной жидкости, причеиъ ей было приписано свойство несжимаемости, т. е. $\rho = const.$ Въ главѣ II, § 8 данъ выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія такихъ жидкостей (18), причеиъ тамъ указывалось, что для сжимаемыхъ жидкостей (не вязкихъ) имѣютъ мѣсто тѣ-же уравненія, но съ введеніемъ добавочнаго условія:

$$\rho = f(p).$$

Мы видимъ, что идеальная жидкость можетъ быть характеризована свойствами:

$$\mu = 0, \quad \theta = 0;$$

и дѣйствительно, при этихъ предположеніяхъ, уравненія (90) прямо переходятъ въ уравненія (18).

Это не имѣетъ мѣста для сжимаемыхъ не вязкихъ жидкостей. Для нихъ имѣемъ лишь

$$\mu = 0.$$

Въ этомъ предположеніи уравненія (90) перепишутся такъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - \lambda\theta)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - \lambda\theta)}{\partial y} \dots (90, d)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - \lambda\theta)}{\partial z}.$$

Такимъ образомъ вмѣсто p въ уравненіяхъ (18) стоитъ функція p_1 , гдѣ

$$p_1 = (p - \lambda\theta), \dots \dots \dots (97)$$

причеиъ p_1 и будетъ гидродинамическимъ давленіемъ въ томъ смыслѣ въ какомъ оно разсматривалось въ главахъ I и II.

Полученный результатъ объясняется тѣмъ, что для послѣдняго случая p , входящее въ уравненія (90) не есть давленіе въ физическомъ смыслѣ, которое можетъ быть измѣрено соответствующими приборами, а есть аналитическая фикція, введенная нами для возможности непрерывнаго перехода отъ уравненій гидростатики къ уравненіямъ гидродинамики.

Въ вязкой жидкости, будь она сжимаема или несжимаема, на основаніи (88), давленія на три взаимно-перпендикулярныя площадки, при движеніи жидкости, различны. Если же жидкость не вязка, т. е. $\mu = 0$, то изъ тѣхъ же выраженій вытекаетъ, что эти давленія становятся равными между собой и приводятся къ выраженію (97).

Если бы между коэффициентами λ и μ существовала зависимость такого свойства, что при $\mu = 0$ и $\lambda = 0$, то невязкія несжимаемая или сжимаемая жидкости ничѣмъ не отличались бы; въ этомъ случаѣ, для $\mu = 0$, изъ (88) имѣли бы:

$$N_x = N_y = N_z = -p,$$

т. е. p было бы истиннымъ давленіемъ.

Такой случай представляетъ гипотеза Стокса, о которой сказано выше (§ 32). Дѣйствительно, уравненія (90,а) прямо переходятъ въ уравненія (18) положеніемъ $\mu = 0$, независимо отъ того сжимаема ли жидкость или нѣтъ.

35. Для окончательнаго рѣшенія вопроса о движеніи вязкой жидкости, къ полученнымъ выше дифференціальнымъ уравненіямъ должны быть прибавлены условія на границахъ и начальныя условія, подобно тому какъ это сдѣлано въ § 12, гл. II для идеальныхъ жидкостей.

Общее кинематическое условіе, выражающее невозможность протеканія жидкости черезъ твердыя границы, останется тѣмъ же, т. е.

$$(u - u_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (v - v_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (w - w_1) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \dots (39)$$

гдѣ

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \dots \dots \dots (36)$$

есть уравненія одной изъ подвижныхъ границъ.

Но кромѣ этого, для вязкихъ жидкостей, должны быть введены еще и динамическія условія.

Во первыхъ, на какой либо безконечно малой пограничной площадкѣ нормальныя напряженія X_n, Y_n, Z_n должны быть равны съ обѣихъ сторонъ ея.

Кромѣ того нужно положить, что составляющая напряженія на какую либо безконечно малую площадку пограничной поверхности, лежащая въ касательной къ этой поверхности плоскости, должна быть параллельна и прямо-противоположна относительной скорости, а по своей величинѣ этой скорости пропорціональна.

Высказанное положеніе содержитъ въ себѣ понятіе о такъ называемомъ *внѣшнемъ треніи* жидкости и требуетъ введенія новаго коэффициента.

Для аналитическаго выраженія этого положенія возьмемъ нормальную составляющую N_n напряженія на стѣнку въ какой либо точкѣ ея. Имѣемъ:

$$N_n = X_n \cos(n, x) + Y_n \cos(n, y) + Z_n \cos(n, z), \dots (98)$$

гдѣ n положительное направленіе нормами въ разсматриваемой точкѣ.

Проекціи на координатныя оси X, Y, Z касательной къ стѣнкѣ составляющей того же напряженія будутъ:

$$X_n - N_n \cos(n, x), \quad Y_n - N_n \cos(n, y), \quad Z_n - N_n \cos(n, z);$$

отсюда аналитическое выраженіе нашего положенія приметъ такой видъ:

$$X_n - \{X_n \cos(n, x) + Y_n \cos(n, y) + Z_n \cos(n, z)\} \cos(n, x) = \nu (u_1 - u),$$

$$Y_n - \{X_n \cos(n, x) + Y_n \cos(n, y) + Z_n \cos(n, z)\} \cos(n, y) = \nu (v_1 - v), \dots (99)$$

$$Z_n - \{X_n \cos(n, x) + Y_n \cos(n, y) + Z_n \cos(n, z)\} \cos(n, z) = \nu (w_1 - w).$$

Здѣсь ν есть коэффициентъ внѣшняго тренія жидкости, зависящій какъ отъ свойствъ жидкости, такъ и тѣла съ ней соприкасающагося.

Для случая $\nu = 0$, находимъ изъ (99), что

$$\frac{X_n}{\cos(n, x)} = \frac{Y_n}{\cos(n, y)} = \frac{Z_n}{\cos(n, z)},$$

т. е. если коэффициентъ внѣшняго тренія нуль, другими словами жидкость скользитъ вдоль стѣнокъ, то напряженія на стѣнкахъ направлены по нормалямъ къ нимъ.

Если же $\nu = \infty$, то по раздѣленіи на ν равенствъ (99) и положенія $\nu = \infty$, находимъ:

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1,$$

т. е. частицы жидкости, соприкасающіяся со стѣнками, движутся вмѣстѣ съ ними. Мы имѣемъ случай прилипанія жидкости къ стѣнкѣ, вдоль которой она движется. Гидромеханика, обычно, пользуется предположеніемъ $\nu = \infty$.

Глава VIII.

Работа деформациі сплошно-деформирующагося тѣла.

Разсѣяніе энергіи.

36. Выдѣлимъ въ сплошно-деформирующемся тѣлѣ элементарный параллелопипедъ съ ребрами dx, dy, dz , параллельными координатнымъ осямъ. Пусть составляющія по осямъ скорости в центра параллелопипеда будутъ u, v, w , а составляющія напряженій въ той же точкѣ соотвѣтствуютъ обозначеніямъ (4, a).

За безконечно малый промежутокъ времени dt элементарный параллелопипедъ перемѣщается поступательно со скоростью v , вращается вокругъ оси, проходящей черезъ его центръ съ угловой скоростью ω и деформируется. Источникомъ всѣхъ этихъ движеній являются внѣшнія силы, приложенныя къ разсматриваемому тѣлу, какъ на поверхности его, такъ и силы дѣйствующія на единицу массы. Эти же силы порождаютъ и внутреннія напряженія (4, a).

По отношенію къ разсматриваемому параллелопипеду напряженія на граняхъ его, а также сила на единицу массы, приложенная въ центрѣ тяжести его, представляютъ внѣшнія силы.

Вычислимъ работу всѣхъ вышеуказанныхъ силъ за безконечно малый промежутокъ времени dt .

Центръ параллелопипеда за время dt перемѣщается по осямъ на

$$u dt, \quad v dt, \quad w dt,$$

поэтому работа силы на единицу массы, приложенной въ центрѣ тяжести будетъ:

$$\rho (Xu + Yv + Zw) dx dy dz dt; \quad (100)$$

это работа поступательнаго движенія.

Для нахождения работы вращательнаго движенія нужно моменты всѣхъ силъ вокругъ направлений, параллельныхъ координатнымъ осямъ, проведеннымъ черезъ центръ тяжести, помножить соотвѣтственно на

$$\omega_1 dt, \quad \omega_2 dt, \quad \omega_3 dt.$$

Вычислимъ моментъ относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно оси X .

На грани, перпендикулярныя оси Y , дѣйствуютъ параллельно оси Z двѣ силы, приложенныя соотвѣтственно въ центрахъ этихъ граней. Проекціи ихъ на ось Z будутъ:

$$\left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \text{ и } - \left(Z_y - \frac{\partial Z_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz;$$

плечи этихъ силъ равны $\frac{dy}{2}$; отсюда результирующій моментъ этихъ силъ, вращающій по часовой стрѣлкѣ вокругъ оси X , равенъ:

$$Z_y dx dy dz.$$

Въ свою очередь на грани перпендикулярныя оси Z , параллельно оси Y дѣйствуютъ двѣ силы, приложенныя въ центрахъ этихъ граней; ихъ проекціи на ось Y будутъ:

$$\left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \text{ и } - \left(Y_z - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy,$$

плечи ихъ $\frac{dz}{2}$; результирующій моментъ (вращающій противъ часовой стрѣлки) равенъ:

$$- Y_z dx dy dz;$$

остальныя силы даютъ относительно оси X моменты равные нулю.

Итакъ результирующій моментъ относительно оси X будетъ

$$(Z_y - Y_z) dx dy dz.$$

Аналогично моменты относительно осей Y и Z будутъ:

$$(X_z - Z_x) dx dy dz \text{ и } (Y_x - X_y) dx dy dz.$$

На основаніи (8) всѣ три момента равны нулю, т. е. работа вращенія элементарнато параллелоипеда за время dt равна нулю.

Перейдемъ теперь къ вычисленію работы деформаціи.

Разсмотримъ двѣ грани, перпендикулярныя къ оси X . Центры ихъ, за бесконечно малый промежутокъ времени dt , перемѣщаются въ направленіи осей координатъ на

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt, \quad \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt, \quad \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt,$$

и

$$\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt, \quad \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt, \quad \left(w - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt.$$

Проекціи силъ, соотвѣтственно приложенныхъ къ этимъ центрамъ и соотвѣтствующихъ указаннымъ перемѣщеніямъ, будутъ:

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz, \left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz, \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz,$$

и

$$- \left(X_x - \frac{\partial X_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz, - \left(Y_x - \frac{\partial Y_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz, \\ - \left(Z_x - \frac{\partial Z_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz.$$

Перемножая силы на соотвѣтственные перемѣщенія и на косинусы угловъ между ними, послѣ сложения получимъ:

$$\left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial X_x}{\partial x} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial Y_x}{\partial x} + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + w \frac{\partial Z_x}{\partial x} \right) dx dy dz dt + R'_5, \dots \dots \dots (101)$$

гдѣ R'_5 сумма членовъ порядка малости выше четвертаго.

Аналогичныя выраженія для работъ деформаци при перемѣщеніи граней перпендикулярныхъ къ осямъ Y и Z будутъ:

$$\left(X_y \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial X_y}{\partial y} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ \left. + w \frac{\partial Z_y}{\partial y} \right) dx dy dz dt + R''_5, \dots \dots \dots (102)$$

$$\left(X_z \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial X_z}{\partial z} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\ \left. + w \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt + R'''_5, \dots \dots \dots (103)$$

Складывая выраженія (100), (101), (102), (103), получимъ работу при перемѣщеніи и деформаци разсматриваемаго параллелоипеда за время dt . Въ результатѣ находимъ:

$$\left[\rho \left(Xu + Yv + Zw \right) + u \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ \left. + X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ \left. + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz dt + R dx dy dz dt, \dots \dots \dots (104)$$

гдѣ R безконечно малая перваго порядка.

Сумма первыхъ четырехъ членовъ въ предыдущемъ выраженіи можетъ быть легко преобразована, для чего помножаемъ уравненія (14) на u , v , w и складываемъ; въ такомъ случаѣ получимъ въ лѣвой части

$$\rho \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right),$$

а въ правой сумму вышеуказанныхъ членовъ. Но очевидно, что

$$\rho \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) = \rho \frac{d}{dt} \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} = \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2}.$$

Обозначая сумму послѣднихъ девяти членовъ въ прямыхъ скобкахъ черезъ Q , можемъ работу силъ приложенныхъ къ нашему параллелепипеду представить такъ:

$$\rho dx dy dz d \frac{v^2}{2} + (Q + R) dx dy dz dt;$$

замѣчая что $\rho dx dy dz = \delta m$ есть величина постоянная для данного элементарнаго параллелепипеда, равная его массѣ, не измѣняющаяся при деформаци, можемъ написать, что вышеуказанная работа равна:

$$d \frac{\delta m v^2}{2} + (Q + R) dx dy dz dt.$$

Если проинтегрировать послѣднее выраженіе по всему объему, занятому нашимъ сплошно-деформирующимся тѣломъ, то должны получить работу всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемому тѣлу, которая составитъ изъ работы поверхностныхъ силъ и работы силъ на единицу массы. Въ наиболѣе общемъ случаѣ сюда долженъ быть прибавленъ механической эквивалентъ извнѣ приведеннаго тепла. Въ дальнѣйшемъ мы предположимъ, что нѣтъ ни привода извнѣ, равно какъ и отдачи тѣломъ тепла.

Съ другой стороны эта сумма должна быть равна полному измѣненію энергіи за взятый промежутокъ времени.

37. Мы видимъ, что работа всѣхъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемому элементу за бесконечно малый промежутокъ времени dt , слагается изъ приращенія живой силы его, т. е. кинетической энергіи, и изъ работы поверхностныхъ силъ, дающихъ, слѣдовательно, измѣненіе потенциальной энергіи.

Обратимъ вниманіе на эту работу поверхностныхъ силъ, т. е. на членъ:

$$(Q + R) dx dy dz dt;$$

Отнеся ее къ единицѣ объема и времени и переходя къ предѣлу, когда $R=0$, получимъ, что она равна Q , и слагается изъ вышеуказанныхъ девяти членовъ.

Помня, что

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y,$$

и обращаясь къ обозначеніямъ (49), можемъ написать на основаніи (104):

$$Q = aX_x + bY_y + cZ_z + 2X_y p_1 + 2Y_z p_2 + 2Z_x p_3. \quad \dots (105)$$

Для однороднаго, изотропнаго тѣла, пользуясь выраженіями (88) для напряженій, найдемъ:

$$Q = -p(a + b + c) + \lambda(a + b + c)^2 + 2\mu(a^2 + b^2 + c^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2). \quad \dots (106)$$

Первый членъ полученнаго выраженія, на основаніи (57), представляетъ работу деформации (отнесенную къ единицѣ времени и объема), подъ дѣйствіемъ равномѣрнаго со всѣхъ сторонъ давленія p , при скорости деформации θ , или что тоже $(a + b + c)$; съ измѣненіемъ знака у деформации мѣняется и знакъ этой работы, т. е. энергія затраченная при сжатіи, при расширеніи въ прежнее состояніе возстановляется сполна, другими словами разсматриваемый членъ представляетъ работу нѣкотораго обратимаго процесса; это есть потенциальная энергія деформации. Здѣсь предполагается, конечно, что p зависитъ лишь отъ ρ , т. е. отъ удѣльнаго объема; въ такомъ лишь случаѣ выраженіе $-p\theta dv$ можетъ быть полнымъ дифференціаломъ, т. е. представлять работу обратимаго процесса.

Остальные два члена выраженія (106) остаются всегда положительными и представляютъ собой потерянную механическую энергію обращенную (вообще говоря) въ тепло. Эта часть работы представится функцией

$$\Phi = \lambda(a + b + c)^2 + 2\mu(a^2 + b^2 + c^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2). \quad \dots (107)$$

Функция Φ есть, по терминологіи лорда Rayleigh'a, „*функция растяжнія*“.

Введемъ обозначеніе

$$F = -p\theta + \frac{1}{2} \Phi. \quad \dots (108)$$

Сравнивая съ формулами (88) находимъ что:

$$N_x = \frac{\partial F}{\partial a}, \quad N_y = \frac{\partial F}{\partial b}, \quad N_z = \frac{\partial F}{\partial c},$$

$$T_x = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_1}, \quad T_y = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_2}, \quad N_z = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_3}. \quad \dots (109)$$

Слѣдовательно F есть какъ бы потенциальная функция напряжений, считая за параметры, характеризующіе ихъ для данной точки: $a, b, c, 2p_1, 2p_2, 2p_3$.

Такимъ образомъ функция F принимаетъ слѣдующій видъ:

$$F = N_x a + N_y b + N_z c + 2T_x p_1 + 2T_y p_2 + 2T_z p_3 \dots (108, a)$$

38. Функция разсѣянія Φ можетъ быть просто разложена на сумму шести квадратовъ*). Не приводя выкладокъ пишемъ:

$$\begin{aligned} \Phi = 2\mu \left\{ \left[a + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + \left[b + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[c + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 \dots (110) \right. \end{aligned}$$

Такъ какъ подкоренныя количества въ послѣднемъ выраженіи должны быть всегда положительными для сжимаемаго тѣла, то отсюда находимъ, что

$$3\lambda + 2\mu \geq 0 \dots \dots \dots (111)$$

Мы видимъ, что гипотеза Стокса (§ 32) есть предѣльный случай послѣдней зависимости.

Функция разсѣянія Φ можетъ быть также выражена черезъ напряжения въ данной точкѣ. Для этого изъ равенства (88) определяемъ p_1, p_2, p_3 черезъ T_1, T_2, T_3 .

Затѣмъ складываемъ первыя три равенства (88), откуда находимъ:

$$(a + b + c) = \frac{N_x + N_y + N_z + 3p}{3\lambda + 2\mu} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} (N + p),$$

гдѣ

$$N = \frac{N_x + N_y + N_z}{3}.$$

Отсюда, подставляя значеніе $(a + b + c)$ въ выраженія для N_x, N_y, N_z , имѣемъ:

$$a = \frac{1}{2\mu} \left[N_x + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} (N + p) \right], b = \frac{1}{2\mu} \left[N_y + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} (N + p) \right],$$

$$c = \frac{1}{2\mu} \left[N_z + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} (N + p) \right].$$

*) См. М. Brillouin. Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Paris 1907. § 26, стр. 34.

Найденныя выраженія для a, b, c, p_1, p_2, p_3 подставляемъ въ (110); послѣ простыхъ передѣлокъ получимъ:

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2\mu} \left\{ \left[N_x + p + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}} - 1 \right) (N + p) \right]^2 + \left[N_y + p + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}} - 1 \right) (N + p) \right]^2 + \left[N_z + p + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}} - 1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. (N + p) \right]^2 + 2T_x^2 + 2T_y^2 + 2T_z^2 \right\}. \dots \dots \dots (112) \end{aligned}$$

Дадимъ теперь другое преобразование функции Φ , имѣющее значеніе въ дальнѣйшемъ.

Для этого прибавимъ и отнимемъ отъ правой части равенства (107) $2\mu\theta^2$; помня, что $\theta = (a + b + c)$, найдемъ:

$$\Phi = (\lambda + 2\mu)\theta^2 + 4\mu(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - ab - ac - bc). \dots (107,a)$$

Обращаясь къ обозначеніямъ (45) и (49), можемъ написать, что

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Замѣчая, что

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2,$$

гдѣ ω угловая скорость вращенія частицы (вихрь), имѣемъ:

$$\begin{aligned} \Phi = (\lambda + 2\mu)\theta^2 + 4\mu\omega^2 + 4\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \dots \dots \dots (113) \end{aligned}$$

Для нахождения энергии D , разсѣянной внутри нѣкотораго объема, занятаго движущейся жидкостью, нужно взять интеграль отъ функции Φ , распространенный на этотъ объемъ. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} D = \iiint \Phi dx dy dz = (\lambda + 2\mu) \iiint \theta^2 dx dy dz + 4\mu \iiint \omega^2 dx dy dz + \\ + 4\mu \iiint (U_1 + U_2 + U_3) dx dy dz, \dots \dots \dots (114) \end{aligned}$$

гдѣ черезъ U_1, U_2, U_3 , сокращенно обозначены слагаемыя, стояція въ прямыхъ скобкахъ въ (113). Послѣдній тройной интеграль легко

можетъ быть преобразованъ въ двойной, распространенный по поверхности разсматриваемаго объема. Очевидно, что:

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy dz = \iint dx dz \int \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \iint dx dz \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - \int u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \right) = \iint u \frac{\partial v}{\partial x} dx dz - \iiint u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy dz;$$

аналогично найдемъ:

$$\iiint \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = \iint u \frac{\partial v}{\partial y} dy dz - \iiint u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} dx dy dz.$$

Замѣчая, что:

$$dy dz = l dS, dx dz = m dS, dx dy = n dS,$$

гдѣ l, m, n косинусы съ осями координатъ внутренней нормали къ поверхности, ограничивающей нашъ объемъ, а dS — элементъ этой поверхности, и вычитая изъ перваго результата второй, получимъ:

$$\iiint \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz = \iiint U_1 dx dy dz = \iint \left[u \frac{\partial v}{\partial x} m - u \frac{\partial v}{\partial y} l \right] dS.$$

Распространяя этотъ результатъ на U_2 и U_3 , можемъ написать:

$$\iiint U_2 dx dy dz = \iint \left(w \frac{\partial u}{\partial z} l - w \frac{\partial u}{\partial x} n \right) dS,$$

$$\iiint U_3 dx dy dz = \iint \left(v \frac{\partial w}{\partial y} n - v \frac{\partial w}{\partial z} m \right) dS.$$

Поэтому находимъ для D , окончательно, такое выраженіе:

$$D = (\lambda + 2\mu) \iiint \Theta^2 dx dy dz + 4\mu \iiint \omega^2 dx dy dz + 4\mu \iint \left[l \left(w \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial z} \right) + n \left(v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dS. \dots (115)$$

Послѣдній тройной интеграль въ (114) можетъ быть преобразованъ и по другому, пользуясь соображеніемъ, что къ подынтегральной функціи въ тройномъ интеграль можно прибавить любую функцію, тройной интеграль отъ которой, въ тѣхъ же предѣлахъ, равенъ нулю.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться обобщенной формулой Грина въ видѣ:

$$\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iint (Pl + Qm + Rn) dS, \dots (116)$$

гдѣ P, Q и R функции, каждая, отъ x, y, z ; а l, m, n —косинусы съ осями внутренней нормали къ пограничной поверхности; и теоремой Грина, выражающей, что:

$$\iint \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \iiint (V \Delta^2 U - U \Delta^2 V) dx dy dz, \dots (117)$$

гдѣ Δ^2 символъ Лагранжа, n —внутренняя нормаль.

На основаніи вышесказаннаго можемъ написать, что:

$$\begin{aligned} 2 \iiint (U_1 + U_2 + U_3) dx dy dz &= 2 \iiint (U_1 + U_2 + U_3) dx dy dz + \iiint \left(\frac{\partial u\theta}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial v\theta}{\partial y} + \frac{\partial w\theta}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint \left[2 (U_1 + U_2 + U_3) + \frac{\partial u\theta}{\partial x} + \frac{\partial v\theta}{\partial y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial w\theta}{\partial z} \right] dx dy dz. \dots (118) \end{aligned}$$

Дѣйствительно, пользуясь (116), находимъ:

$$\iiint \left(\frac{\partial u\theta}{\partial x} + \frac{\partial v\theta}{\partial y} + \frac{\partial w\theta}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iint (ul + vm + wn) \theta dS.$$

Разсматривая двойной интегралъ правой части послѣдняго равенства, замѣчаемъ, что для несжимаемой жидкости, т. е. для $\theta = 0$, онъ всегда равенъ нулю, независимо отъ поверхности, на которую распространень, т. е. независимо отъ того будутъ ли это дѣйствительныя границы жидкости, или геометрическая поверхность, заданная въ ея потокѣ. Если жидкость сжимаема, т. е. $\theta \geq 0$, то для неподвижныхъ границъ, на основаніи условія (38, а) § 13, имѣемъ:

$$ul + vm + wn = 0,$$

т. е. двойной интегралъ опять обращается въ нуль. Въ случаѣ поверхности смачиваемой жидкостью, т. е. при коэффициентѣ внѣшняго тренія $\gamma = \infty$, при неподвижныхъ стѣнкахъ $u = 0, v = 0, w = 0$, значитъ и въ этомъ случаѣ двойной интегралъ обращается въ нуль.

Поэтому, имѣя ввиду вышеуказанныя условія, можемъ считать равенство (118) вѣрнымъ. Подъинтегральная функція, стоящая въ

правой части (118) въ прямыхъ скобкахъ, послѣ дифференцированія, переписется такъ:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \\ & + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \end{aligned}$$

Каждая строка можетъ быть замѣнена соотвѣтствующими слагаемыми слѣдующаго выраженія:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (119) \end{aligned}$$

Для дальнѣйшихъ преобразованій рассмотримъ выраженіе, стоящее въ скобкахъ перваго слагаемаго.

На основаніи уравненій (14) § 6, можемъ написать:

$$X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z};$$

съ другой стороны, сравнивая съ уравненіемъ (31, а) § 11, имѣемъ

$$X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2} + 2(w\omega_2 - v\omega_3).$$

На основаніи этого

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2} + 2(w\omega_2 - v\omega_3).$$

Произведя аналогичныя преобразованія въ (119) для двухъ другихъ слагаемыхъ, перепишемъ (118) такъ:

$$\begin{aligned} 2 \iiint (U_1 + U_2 + U_3) dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial z^2} \right) dx dy dz + \\ + 2 \iiint \left[\frac{\partial(w\omega_2 - v\omega_3)}{\partial x} + \frac{\partial(u\omega_3 - w\omega_1)}{\partial y} + \frac{\partial(v\omega_1 - u\omega_2)}{\partial z} \right] dx dy dz, \end{aligned}$$

или, обращаясь къ преобразованіямъ (116) и (117), и полагая въ послѣднемъ изъ нихъ $V=1$ и $U=v^2$, найдемъ:

$$2 \iiint (U_1 + U_2 + U_3) dx dy dz = - \frac{1}{2} \iint \frac{\partial v^2}{\partial n} dS - 2 \iint \left[(w\omega_1 - v\omega_3)l + (u\omega_3 - w\omega_1)m + (v\omega_1 - u\omega_2)n \right] dS. \dots (120)$$

Такимъ образомъ (114) приметъ такой видъ:

$$D = (\lambda + 2\mu) \iiint \theta^2 dx dy dz + 4\mu \iiint \omega^2 dx dy dz - \mu \iint \frac{\partial v^2}{\partial n} dS + 4\mu \iint \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ u, & v, & w \\ \omega_1, & \omega_2, & \omega_3 \end{vmatrix} dS \dots (114,a)$$

39. Теперь мы можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія о потеряхъ энергіи при движеніи жидкости.

Для невязкой жидкости, т. е. при $\mu=0$, вся потеря зависитъ отъ θ , т. е. отъ сжимаемости ея, такъ что въ идеальной жидкости, для которой и $\theta=0$, разсѣяніе энергіи не имѣетъ мѣста.

Въ томъ случаѣ, когда между λ и μ существуетъ зависимость, по которой для $\mu=0$ и $\lambda=0$, какъ напр. по гипотезѣ Стокса (§ 32), гдѣ

$$3\lambda + 2\mu = 0,$$

разсѣяніе энергіи не будетъ и при $\theta \geq 0$, лишь бы жидкость была невязка, т. е. $\mu=0$.

Если жидкость несжимаема (т. е. $\theta=0$), но вязка, то, какъ указано выше, послѣднее выраженіе для D имѣетъ мѣсто для любого объема, выбраннаго внутри жидкости, причемъ въ нуль обращается лишь первое слагаемое (передъ остальными стоитъ множителемъ μ). Если при этомъ объемъ ограниченъ твердыми стѣнками, на которыхъ нѣтъ скользянія, т. е. $v=0$ (а слѣдовательно и $u=v=w=0$), то и два послѣднихъ интеграла по поверхности обращаются въ нуль, и вся потеря D сведется къ

$$D = 4\mu \iiint \omega^2 dx dy dz \dots (121)$$

Отсюда заключаемъ, что въ вязкой несжимаемой жидкости, движущейся внутри замкнутаго объема безъ скользянія по стѣнкамъ, разсѣянная энергія зависитъ исключительно отъ вихревого состоянія

движущейся жидкости; если жидкость может двигаться съ потенциаломъ скоростей, т. е. $\omega = 0$, то разсѣянiя энергiи нѣтъ *).

Къ тѣмъ же результатамъ можно было бы прийти, пользуясь выраженiемъ (115) для D , выведеннымъ нами.

Глава IX.

Вихревое движенiе вязкой жидкости.

40. Въ главѣ IV, §§ 20, 21, 22, 23, 24 приведены законы вихревого движенiя идеальныхъ жидкостей. Посмотримъ теперь, какими свойствами обладаетъ вихревое движенiе вязкой жидкости.

Мы ограничимся вязкими, несжимаемыми жидкостями, уравненiя движенiя которыхъ (90, b) имѣютъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + k\Delta^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + k\Delta^2 v, \quad (90, b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + k\Delta^2 w.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ $\Theta = 0$, то выраженiе $\Delta^2 u$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

*) Замѣтимъ здѣсь, что выраженiе для D въ видѣ (114, a) приведено въ вышеуказанной работѣ М. Brillouin'a (§ 26, стр. 34, 35), но данъ невѣрный выводъ его. Для частнаго случая, $\Theta = 0$, см. Н. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, 1907 г. § 317, (11).

Обращаясь къ обозначеніямъ (45), и примѣняя то-же преобразо-
ваніе къ $\Delta^2 v$ и $\Delta^2 w$ можемъ написать:

$$\Delta^2 u = 2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right), \Delta^2 v = 2 \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right), \Delta^2 w = 2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right). \quad (122)$$

Если изъ уравненій (90, b) опредѣлимъ X, Y, Z и сравнимъ съ
уравненіемъ (31, a), полученнымъ для идеальныхъ жидкостей, то за-
мѣтимъ, что результаты будутъ отличаться на члены вида:

$$- k\Delta^2 u, - k\Delta^2 v, - k\Delta^2 w;$$

поэтому, пользуясь (122) мы можемъ уравненія (90, b) переписать въ
такомъ видѣ:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + 2 (\omega_2 w - \omega_3 v) - 2 k \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right),$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial t} + 2 (\omega_3 u - \omega_1 w) - 2 k \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right), \dots \quad (123)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial w}{\partial t} + 2 (\omega_1 v - \omega_2 u) - 2 k \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right).$$

Продифференцировавъ первое уравненіе по y , а второе по x и
вычтя первый результатъ ихъ второго, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + 2 \left(\omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_2}{\partial y} - \omega_3 \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \right. \\ & - \omega_3 \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left. \right) - 2 k \left(\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z \partial x} \right). \end{aligned}$$

Въ нашемъ случаѣ имѣютъ мѣсто зависимости (17, b) и (58):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \dots \dots \dots (17, b)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0; \dots \dots \dots (58)$$

обращаясь, кромѣ того, къ обозначеніямъ (45) можемъ написать:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial \omega_3}{\partial t};$$

на основаніи (54) имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2},$$

на томъ же основаніи:

$$w \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + w \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = -w \frac{\partial \omega_3}{\partial z};$$

кромѣ того изъ (17, b) вытекаетъ, что

$$- \omega_3 \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_3 \frac{\partial v}{\partial y} = \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Воспользовавшись этими преобразованиями мы можемъ предыдущій результатъ дифференцированія представить въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = & - \frac{\partial \omega_3}{\partial t} - u \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - w \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} \right) \dots \dots (124) \end{aligned}$$

Первые четыре члена правой части равны, какъ легко замѣтить, $-\frac{d\omega_3}{dt}$; предполагая, кромѣ того, что силы на единицу массы имѣютъ потенциалъ, перепишемъ послѣдній результатъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} \right).$$

Дифференцируя въ (123) первое уравненіе по z , а третье по x , и вычитая одинъ результатъ изъ другого, потомъ второе уравненіе по z , а третье по y и вычитая опять, найдемъ въ концѣ концовъ еще двѣ зависимости, аналогичныхъ послѣдней.

Такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} = & \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial u}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} \right), \\ \frac{d\omega_2}{dt} = & \omega_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial v}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2} \right), \dots \dots (125) \\ \frac{d\omega_3}{dt} = & \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Эти выраженіе подобны выраженіямъ (59, b), приведеннымъ въ главѣ IV, гдѣ рѣчь шла объ идеальныхъ жидкостяхъ. И дѣйствительно, полагая въ (125) $k = 0$, т. е. жидкость не вязкую, находимъ, что выраженія (125) переходятъ въ (59, b).

Полныя производныя по времени отъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, стояція въ лѣвыхъ частяхъ послѣднихъ равенствъ, представляютъ собою скорости измѣненія составляющихъ по осямъ координатъ вихря ω , принадлежащаго какой-либо вполне опредѣленной частицѣ жидкости.

41. Послѣднія выраженія даютъ возможность сдѣлать нѣкоторые важныя заключенія о вихревомъ движеніи всякой жидкости.

Если въ какой либо моментъ времени для какой либо точки жидкости $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, то выраженія (125) примутъ видъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= k \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} \right), \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= k \left(\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2} \right), \dots \dots \dots (126) \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= k \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

при чемъ правыя части могутъ не обращаться одновременно въ нули для разсматриваемой точки въ данный моментъ времени; другими словами точка жидкости, двигавшаяся въ данный моментъ съ потенциаломъ скоростей въ слѣдующій моментъ будутъ двигаться вихревымъ движеніемъ.

Мы видимъ, что законъ сохранения вихрей Гельмгольца для всякой жидкости въ общемъ случаѣ, не имѣетъ мѣста.

Если бы для какого либо момента времени для всѣхъ точекъ внутри объема, занятого движущейся жидкостью, мы имѣли $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, то правыя части должны тоже обратиться въ нуль для точекъ внутри объема, но не для поверхности его, т. е. и въ слѣдующій моментъ внутри объема не будетъ вихревого движенія, съ поверхности же внутрь жидкости вихри могутъ распространяться.

Послѣднее заключеніе сдѣлано на основаніи извѣстныхъ свойствъ функціи.

Если какая либо функція трехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z и параметра t , для какого либо частнаго значенія t обращается въ нуль внутри какой либо замкнутой поверхности, то внутри той же поверхности и для того же значенія t , обратятся въ нули и всѣ частныя производныя этой функціи; для точекъ же поверхности, ограничивающей разсматриваемый объемъ послѣднее обстоятельство, вообще говоря, мѣста не имѣетъ. Указанная выше функція имѣетъ аналитическое продолженія и за предѣлами поверхности, не имѣющее физическаго значенія въ разсматриваемомъ вопросѣ.

Примѣромъ можетъ служить функція

$$\Psi(x, y, z, t) = a(1 - e^{-(t-t_0)\sqrt{Vr^2 - x^2 - y^2 - z^2 + (t-t_0)^2}}),$$

обращающаяся при $t = t_0$ въ нуль со всѣми частными производными внутри объема, ограниченной сферой радіуса r ; для точекъ же поверхности этой сферы эти частныя производныя отличны отъ нуля (нѣкоторыя обращаются даже въ ∞).

Такимъ образомъ мы видимъ, что въ вязкой жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ силъ на единицу массы имѣющихъ потенциалъ, и движущейся въ какой либо моментъ съ потенциаломъ скоростей должно возникнуть вихревое движеніе, источникомъ котораго являются поверхности ограничивающія жидкость.

Эти вихри, распространяясь въ жидкости, являются причиной неизбѣжныхъ потерь энергіи, сопровождающихъ движеніе вязкой жидкости. Для простѣйшаго случая эта потеря дается выраженіемъ (121).

Является вопросъ — можетъ ли вязкая жидкость двигаться съ потенциаломъ скоростей. Обращаясь къ выраженіямъ (122), мы видимъ, что существованіе потенциала скоростей, т. е.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

приводитъ насъ къ условіямъ:

$$\Delta^2 u = 0, \quad \Delta^2 v = 0, \quad \Delta^2 w = 0.$$

Эти условія обращаютъ уравненія движенія вязкой жидкости (90, b) въ уравненія движенія идеальной жидкости, такъ какъ равносильны положенію $k = 0$. Другими словами: движеніе вязкой жидкости съ потенциаломъ скоростей ничѣмъ не отличается отъ движенія идеальной жидкости при прочихъ равныхъ условіяхъ.

Но какъ выше было указано, такое движеніе въ вязкой жидкости будетъ неустановившимся и непрочнымъ, такъ какъ стѣнки являются источникомъ вихрей, которые и разрушаютъ движеніе съ потенциаломъ скорости.

42. Въ заключеніе этой главы разсмотримъ одинъ интеграль уравненій движенія вязкой, сжимаемой жидкости, являющійся обобщеніемъ интеграла (32), т. е. теоремы Бернулли.

Для этого предположимъ, что силы на единицу массы, дѣйствующія на нашу жидкость, имѣютъ потенциалъ и произведемъ надъ уравненіями (90) тѣ же преобразованія, которыя произведены надъ уравненіями (30) на стр. 16, удерживая обозначеніе (28) и (29). Уравненія (90) въ результатѣ дадутъ слѣдующую зависимость:

$$\frac{d}{ds} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) ds = \frac{\partial v}{\partial t} ds - \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} d\theta - \frac{\mu}{\rho} (\Delta^2 u dx + \Delta^2 v dy + \Delta^2 w dz),$$

сюда вмѣсто ρ должно быть подставлено его значеніе изъ (17, a) стр. 55. Интегрируя вдоль линіи тока отъ 0 до s , найдемъ такой интеграль движенія:

$$U - P - \frac{v^2}{2} = \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right)_{a, b, c} + \int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} ds - (\lambda + \mu) \int_0^s \frac{d\theta}{\rho} - \mu \int_0^s \frac{(\Delta^2 u dx + \Delta^2 v dy + \Delta^2 w dz)}{\rho} \dots \dots \dots (32, a)$$

Для случая несжимаемой жидкости, т. е. $\rho = const$, на основаніи (17, b), (19) и (29) можемъ написать:

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} = \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right)_{a, b, c} - k \int_0^s (\Delta^2 u dx + \Delta^2 v dy + \Delta^2 w dz) + \int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} ds \dots \dots \dots (32, b)$$

Первый интеграль въ правой части послѣдняго уравненія есть разсѣянная энергія (потеря) на разсматриваемой части линіи тока, разсчитанная на единицу массы и отнесенная къ единицѣ времени.

Въ дальнѣйшемъ мы рассмотримъ нѣкоторые частные случаи движенія вязкой жидкости.

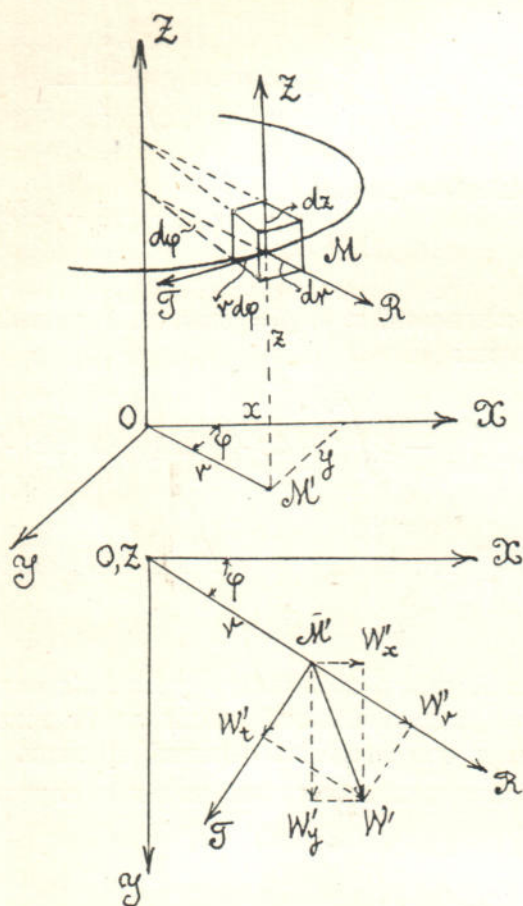
Глава X.

Цилиндрическія координаты.

43. Въ значительномъ числѣ весьма важныхъ вопросовъ прикладнаго характера теченіе жидкости приходится разсматривать какъ движеніе симметричное вокругъ нѣкоторой постоянной оси. Такъ напр.: движеніе воды въ колесахъ турбинъ и центробѣжныхъ насосовъ, въ трубахъ и т. д.

Въ этихъ случаяхъ вмѣсто прежнихъ декартовыхъ координатъ гораздо удобнѣе пользоваться цилиндрическими координатами, въ которыхъ положеніе какой либо точки опредѣляется ея разстояніемъ z

отъ нѣкоторой определенной плоскости (черт. 6) и полярными координатами r и φ проекціи этой точки на ту-же плоскость.



Черт. 6.

Формулы преобразования отъ декартовой къ цилиндрической системѣ координатъ будутъ

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ z = z \dots (127)$$

Полагая одну изъ координатъ постоянной, мы получаемъ такъ называемую координатную поверхность; такъ $r = const.$ даетъ круговую цилиндрическую поверхность съ осью z ; $\varphi = const.$ — плоскость, проходящую черезъ ось Z ; $z = const.$ — плоскость перпендикулярную оси Z . Черезъ каждую точку пространства проходитъ три взаимно-ортогональныхъ координатныхъ поверхности, попарно пересекающіяся по тремъ, такъ же взаимно-ортогональнымъ, координатнымъ линиямъ.

Координатная линия $z = const., \varphi = const.$ есть

прямая, перпендикулярная къ оси Z , пересекающая ее; координатная линия $r = const., z = const.$ есть кругъ, плоскость котораго перпендикулярна оси Z , съ центромъ на той же оси; координатная линия $\varphi = const. r = const.$ есть прямая, параллельная оси Z .

Проведя въ разсматриваемой точкѣ пространства прямыя, касательныя къ координатнымъ линиямъ, проходящимъ черезъ эту точку, получимъ три взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, называемыхъ координатными осями системы въ данной точкѣ. Мы видимъ, что координатныя оси нашей системы перемѣщаются съ перемѣщеніемъ точки.

44. Преобразуя уравненія движенія къ нашей новой системѣ координатъ, мы должны не только вмѣсто прежнихъ координатъ

x, y, z , ввести новыя r, φ, z , но и спроектировать все силы, скорости и ускорения на новыя координатныя оси.

Замѣтимъ, что за положительныя направленія координатныхъ осей считаются тѣ направленія, по которымъ координаты, соотвѣтствующія этимъ осямъ возрастаютъ.

Элементъ объема въ цилиндрической системѣ координатъ, какъ это легко замѣтить изъ чертежа, будетъ:

$$dV = r dr dz d\varphi \dots \dots \dots (127,a)$$

Мы ставимъ себѣ задачей преобразовать къ цилиндрическимъ координатамъ дифференціальныя уравненія движенія вязкой несжимаемой жидкости въ видѣ (90,b). Для этого найдемъ сперва проекціи на координатныя оси R, T, Z , ускоренія точки M , а затѣмъ и силы (на единицу массы) дѣйствующихъ на эту точку. Замѣтимъ, что для новой и старой системъ координатъ проекціи на оси Z равны, поэтому въ нихъ остается произвести лишь замѣну переменныхъ. Для проекцій же на оси R и T мы воспользуемся слѣдующимъ соображеніемъ.

Изъ чертежа (черт. 6) легко получаются слѣдующія зависимости между проекціями вектора W' на оси R, T, Z и X, Y, Z

$$\begin{aligned} W'_r &= W'_x \cos \varphi + W'_y \sin \varphi, \\ W'_t &= W'_y \cos \varphi - W'_x \sin \varphi, \dots \dots \dots (128) \\ W'_z &= W'_z. \end{aligned}$$

Обозначимъ проекціи скорости точки M на новыя оси черезъ w_r, w_t, w_z . На основаніи послѣднихъ зависимостей имѣемъ:

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{dx}{dt} \cos \varphi + \frac{dy}{dt} \sin \varphi, \\ w_t &= \frac{dy}{dt} \cos \varphi - \frac{dx}{dt} \sin \varphi, \\ w_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Пользуясь значеніями для x, y, z (127), находимъ;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sin \varphi \frac{dr}{dt} + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \dots \dots \dots (129)$$

Отсюда

$$w_r = \frac{dr}{dt}, \quad w_t = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad w_z = \frac{dz}{dt} \dots \dots \dots (130)$$

На основаніи этого равенства (129) могутъ быть такъ переписаны:

$$\begin{aligned} u &= w_r \cos \varphi - w_t \sin \varphi, \\ v &= w_r \sin \varphi + w_t \cos \varphi, \dots \dots \dots (131) \\ w &= w_z. \end{aligned}$$

Для нахождения проекцій ускоренія на новыя оси, нужно въ равенство (128) вмѣсто W'_x, W'_y, W'_z вставить соотвѣтственно $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$. Предварительно преобразуемъ эти производныя, пользуясь (131) и (130), къ новымъ переменнымъ.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \cos \varphi \frac{dw_r}{dt} - w_r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \sin \varphi \frac{dw_t}{dt} - w_t \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dw_r}{dt} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{w_t^2}{r} \right) \cos \varphi - \left(\frac{dw_t}{dt} + \frac{w_r w_t}{r} \right) \sin \varphi, \dots \dots \dots (132) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \sin \varphi \frac{dw_r}{dt} + w_r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \frac{dw_t}{dt} - w_t \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r} \right) \sin \varphi + \\ &\quad + \left(\frac{dw_t}{dt} + \frac{w_r w_t}{r} \right) \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw_z}{dt}.$$

На основаніи (130) можемъ написать:

$$\frac{dw_t}{dt} + \frac{w_r w_t}{r} = \frac{dw_t}{dt} + \frac{w_t}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{rdw_t + w_t dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d(w_t r)}{dt}.$$

Обозначая проекціи ускоренія на новыя оси через j_r, j_t, j_z и подставляя послѣднія выраженія въ (128), находимъ:

$$j_r = \frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r},$$

$$j_t = \frac{1}{r} \frac{d(w_t r)}{dt}, \dots \dots \dots (133)$$

$$j_z = \frac{dw_z}{dt}.$$

Это и суть искомыя выраженія проекціи ускоренія матеріальной точки на координатныя оси цилиндрической системы координатъ.

45. Для нахождения проекціи на тѣ же оси силъ на единицу массы нужно въ (128) вмѣсто W_x', W_y', W_z' , подставить соотвѣтственно правыя части уравненій (90,b), предварительно преобразованныя къ цилиндрическимъ координатамъ.

Замѣтимъ сперва, что

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad tg \varphi = \frac{y}{x}; \dots \dots \dots (134)$$

откуда, беря отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ частныя производныя по x и y и пользуясь (127), находимъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = cs \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{y cs^2 \varphi}{x^2} = - \frac{sn \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = sn \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{cs^2 \varphi}{x} = \frac{cs \varphi}{r}.$$

\dots \dots \dots (135)

Поэтому:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} cs \varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{sn \varphi}{r},$$

\dots \dots \dots (136)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} sn \varphi + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{cs \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Обозначая, затѣмъ, проекціи силъ на единицу массы на оси R , T , Z , черезъ R , T , Z и имѣя ввиду обозначенія (5), на основаніи (128) пишемъ:

$$\begin{aligned} R &= X \operatorname{cs} \varphi + Y \operatorname{sn} \varphi, \\ T &= Y \operatorname{cs} \varphi - X \operatorname{sn} \varphi, \dots \dots \dots (137) \\ Z &= Z. \end{aligned}$$

Остается преобразовать къ цилиндрическимъ координатамъ выраженія:

$$\Delta^2 u, \quad \Delta^2 v, \quad \Delta^2 w.$$

Для большей ясности дадимъ сперва общія формулы преобразования, а затѣмъ примѣнимъ ихъ къ нашему частному случаю.

Если ϕ есть функція отъ координатъ x, y, z , то, пользуясь (135), можемъ написать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs} \varphi}{r}, \dots \dots (138) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Отсюда, дифференцируя еще разъ соотвѣтственно по x, y и z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi}{r} \right) \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi}{r} \right) \frac{\operatorname{sn} \varphi}{r} = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \operatorname{cs}^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial r} \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{r^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs} \varphi}{r} \right) \operatorname{sn} \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs} \varphi}{r} \right) \frac{\operatorname{cs} \varphi}{r} = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \operatorname{sn}^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial r} \frac{\operatorname{cs} \varphi \operatorname{sn} \varphi}{r} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs} \varphi \operatorname{sn} \varphi}{r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{r} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{r^2} \dots \dots \dots (139) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Складывая послѣднія три равенства, находимъ:

$$\Delta^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2},$$

или такъ:

$$\Delta^2\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \dots \dots \dots (140)$$

Для нахождения Δ^2u , Δ^2v , Δ^2w вмѣсто ϕ сюда должны быть подставлены послѣдовательно u , v , w изъ (131), выраженные через w_r , w_t , w_z . Послѣ простыхъ передѣлокъ найдемъ:

$$\begin{aligned} \Delta^2u &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) - \frac{w_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial\varphi^2} - 2 \frac{\partial w_t}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right] \cos\varphi - \\ &\quad - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_t}{\partial r} \right) - \frac{w_t}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial\varphi^2} + 2 \frac{\partial w_r}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2} \right] \sin\varphi, \\ \Delta^2v &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) - \frac{w_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial\varphi^2} - 2 \frac{\partial w_t}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right] \sin\varphi + \\ &\quad + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_t}{\partial r} \right) - \frac{w_t}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial\varphi^2} + 2 \frac{\partial w_r}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2} \right] \cos\varphi, \dots (141) \\ \Delta^2w &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Подставляя послѣднія выраженія и (136) въ правыя части уравненій (90, б) мы найдемъ проекціи силъ на единицу массы на оси X , Y , Z , преобразованныя къ цилиндрическимъ координатамъ. Для нахождения ихъ проекцій на оси R , T , Z нужно правыя части первыхъ двухъ уравненій, преобразованныя къ новымъ переменнымъ, подставить соответственно вмѣсто W'_x и W'_y въ равенства (128).

Замѣчая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) - \frac{w_r}{r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(w_r r)}{\partial r} \right] \text{ и } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_t}{\partial r} \right) - \\ &\quad - \frac{w_t}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} \right], \end{aligned}$$

и пользуясь зависимостями (137), найдемъ окончательно искомыя проеціи въ видѣ:

$$W_r = R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + k \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right],$$

$$W_t = T - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + k \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (w_t r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2} \right],$$

. . . (142)

$$W_z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right].$$

Приравнивая эти выраженія соотвѣтственно проекціямъ j_r , j_t , j_z ускоренія точки на тѣ же оси, на основаніи (133), получимъ дифференціальныя уравненія движенія вязкой, несжимаемой жидкости въ цилиндрическихъ координатахъ въ видѣ:

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r} = R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + k \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(w_t r)}{dt} = T - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + k \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (w_t r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2} \right], \dots \dots \dots (143)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right].$$

Для сжимаемой жидкости нужно было бы, на основаніи (92), къ правымъ частямъ послѣднихъ уравненій прибавить силы на единицу массы:

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

преобразованныя, подобно предыдущимъ, къ новымъ переменнымъ и спроектированныя на новыя координатныя оси.

Пользуясь (135), пишемъ:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \operatorname{cs} \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \operatorname{sn} \varphi,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \operatorname{cs} \varphi.$$

Помножая эти выражения на $\frac{\lambda + \mu}{\rho}$ и подставляя въ (128), соответственно вмѣсто W_x' и W_y' получимъ:

$$W_{1,r} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial r},$$

$$W_{1,t} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \dots \dots \dots (142,a)$$

$$W_{1,z} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Преобразование θ , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

къ цилиндрическимъ координатамъ будетъ дано далѣе.

Для идеальной жидкости, т. е. при $k = 0$, эти уравненія переписутся такъ:

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r} = R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(w_t r)}{dt} = T - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi}, \dots \dots \dots (143,a)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

46. Въ дальнѣйшемъ намъ понадобятся выраженія для частныхъ производныхъ отъ u, v, w по x, y, z , преобразованныя къ новымъ переменнымъ r, φ, z . Для этого воспользуемся зависимостями (138), въ которыя вмѣсто ϕ послѣдовательно подставимъ u, v, w изъ (131). Выполнивъ дифференцированіе, найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{\partial w_r}{\partial r} \operatorname{cs}^2 \varphi - \frac{\partial w_t}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} + w_r \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{r} + \\ & + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{r} + w_t \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w_r}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial w_t}{\partial r} \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{r} - w_r \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} -$$

$$- \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} + w_t \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_r}{\partial z} \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial w_t}{\partial z} \operatorname{sn} \varphi, \dots \dots \dots (144)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w_r}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi + \frac{\partial w_t}{\partial r} \operatorname{cs}^2 \varphi - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{r} - w_r \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} -$$

$$- \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} + w_t \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w_r}{\partial r} \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{\partial w_t}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r} + w_r \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{r} +$$

$$+ \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{r} - w_t \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_r}{\partial z} \operatorname{sn} \varphi + \frac{\partial w_t}{\partial z} \operatorname{cs} \varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_z}{\partial r} \operatorname{cs} \varphi - \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{sn} \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_z}{\partial r} \operatorname{sn} \varphi + \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} \frac{\operatorname{cs} \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

47. Пользуясь выраженіями предыдущаго параграфа мы можем условіе сплошности написать въ новыхъ координатахъ. Въ декартовыхъ координатахъ оно имѣло видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (17,b)$$

Подставляя сюда значенія частныхъ производныхъ изъ (144), получимъ

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (145)$$

ИЛИ

$$\Theta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z} \right] = 0 \dots \dots (145, a)$$

Средняя часть этого равенства должна быть вставлена вмѣсто Θ въ выраженія (142, a).

48. Найдемъ теперъ проекціи на оси R, T, Z вихря ω , которыя обозначимъ теперъ черезъ $\omega_r, \omega_t, \omega_z$. Для этого преобразуемъ его составляющія $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ по осямъ X, Y, Z къ новымъ координатамъ, а затѣмъ подставимъ эти выраженія въ (128). На основаніи (45) имѣемъ:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \dots \dots \dots (45) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда соотвѣтственныя выраженія изъ (144) находимъ:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_t}{\partial z} \right) \cos \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) \sin \varphi, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_t}{\partial z} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) \cos \varphi \dots \dots (146) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_t}{\partial r} + \frac{w_t}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Уравненія (128) даютъ намъ окончательно:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_t}{\partial z} \right) = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(w_t r)}{\partial z} \right), \\ \omega_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right), \dots \dots \dots (147) \\ \omega_z &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

49. Въ заключеніе найдемъ проекціи на оси R, T, Z напряженій на три взаимно перпендикулярныхъ плоскости RT, RZ и ZT , проходящихъ черезъ какую либо точку M (черт. 6).

Въ декартовыхъ координатахъ для этихъ напряжений мы имѣли въ гл. VI выраженія (88), которыя могутъ быть такъ переписаны:

$$\begin{aligned}
 N_x &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & T_x &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
 N_y &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & T_y &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\
 N_z &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & T_z &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{88}$$

Искомыя напряженія, которыя мы обозначимъ черезъ

$$N_r, N_t, N_z, T_r, T_t, T_z, \dots \tag{148}$$

могутъ быть выражены черезъ

$$N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z,$$

на основаніи зависимостей (80) § 29. Для этого, пользуясь чертежомъ (6) составимъ табличку косинусовъ, аналогичную (71):

	R	T	Z	
X	csφ	-snφ	0 (149)
Y	snφ	csφ	0	
Z	0	0	1	

Подставляя соотвѣтственно эти косинусы въ зависимости (80), найдемъ:

$$\begin{aligned}
 N_r &= N_x \text{cs}^2\varphi + N_y \text{sn}^2\varphi + 2T_z \text{sn}\varphi \text{cs}\varphi, \\
 N_t &= N_x \text{sn}^2\varphi + N_y \text{cs}^2\varphi - 2T_z \text{sn}\varphi \text{cs}\varphi, \\
 N_z &= N_z \dots \dots \dots \tag{150} \\
 T_r &= T_x \text{cs}\varphi - T_y \text{sn}\varphi, \\
 T_t &= T_x \text{sn}\varphi + T_y \text{cs}\varphi, \\
 T_z &= (N_y - N_x) \text{sn}\varphi \text{cs}\varphi + T_z (\text{cs}^2\varphi - \text{sn}^2\varphi),
 \end{aligned}$$

Замѣняя въ правыхъ частяхъ напряженія N_x, N_y и т. д. ихъ выраженіями изъ (88), можемъ написать:

$$\begin{aligned}
 N_r &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{cs}^2\varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{sn}^2\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi \right], \\
 N_t &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sn}^2\varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{cs}^2\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi \right], \\
 N_z &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \dots \dots \dots (151) \\
 T_r &= \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \operatorname{cs}\varphi - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \operatorname{sn}\varphi \right], \\
 T_t &= \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \operatorname{sn}\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \operatorname{cs}\varphi \right], \\
 T_z &= \mu \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\operatorname{cs}^2\varphi - \operatorname{sn}^2\varphi) \right].
 \end{aligned}$$

Если въ эти выраженія подставить частныя производныя въ функціи отъ r, φ, z , пользуясь зависимостями (144), то получимъ окончательное рѣшеніе нашего вопроса. Такимъ образомъ, послѣ простыхъ передѣлокъ находимъ:

$$\begin{aligned}
 N_r &= -p + \lambda \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial w_r}{\partial r}, \\
 N_t &= -p + \lambda \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{1}{r} \left(w_r + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \right), \\
 N_z &= -p + \lambda \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial w_z}{\partial z}, \dots \dots \dots (152)
 \end{aligned}$$

$$T_r = \mu \left(\frac{\partial w_t}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} \right),$$

$$T_t = \mu \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r} \right),$$

$$T_z = \mu \left(\frac{\partial w_t}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{w_t}{r} \right).$$

Для несжимаемой жидкости, на основаніи (145, a) въ выраженіяхъ для N_r, N_t, N_z , множитель въ прямыхъ скобкахъ, при λ , обращается въ нуль.

50. Интегралы (32, a) и (32, b) § 42 преобразуются просто къ цилиндрическимъ координатамъ. Для этого беремъ выраженія для $\theta, \Delta^2 u, \Delta^2 v, \Delta^2 w$ изъ (145) и (141), затѣмъ, пользуясь формулами преобразования (127), вводимъ вмѣсто dx, dy, dz ихъ выраженія черезъ $dr, d\varphi, dz$.

Въ (32, b) измѣнится лишь первый интеграль въ правой части. Послѣ преобразованій онъ приметъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} k \int_0^s \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) - \frac{w_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right] dr + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_t}{\partial r} \right) - \frac{w_t}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2} \right] r d\varphi + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right] dz \right\} ds. \end{aligned}$$

Глава XI.

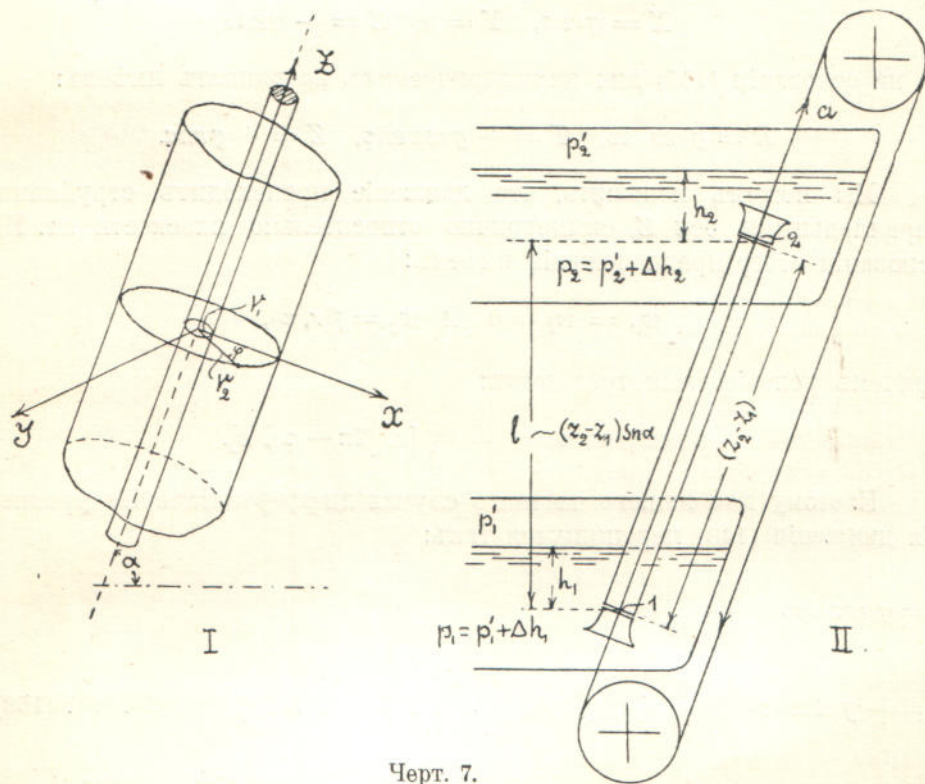
Приложенія предыдущей теоріи.

51. Въ настоящей главѣ мы рассмотримъ рѣшенія нѣкоторыхъ частныхъ вопросовъ, представляющихъ теоретическія схемы практически уже осуществленныхъ приспособленій для использования энергии жидкостей и подъема ихъ.

Шнуровой насосъ и его обращеніе.

Въ введеніи къ нашей работѣ было уже указано, что приоритетъ въ вопросѣ объ использованіи внутренняго тренія жидкости, какъ средства для перемѣщенія ея, долженъ считаться за профессоромъ Н. Е. Жуковскимъ, осуществившемъ и экспериментально изслѣдовавшему эту идею въ видѣ шнурового насоса *). Мы дадимъ здѣсь теорію этого насоса и обращенія его, т. е. шнурового двигателя, основываясь на изложенномъ выше ученіи о движеніи вязкой жидкости.

Пусть вдоль оси цилиндрической трубки радиуса r_2 движется поступательно съ постоянной скоростью a цилиндрической стержень, или шнуръ, радиуса r_1 , такъ, что ось его все время совпадаетъ съ осью трубки; ось трубки наклонена къ горизонту подь угломъ α . Коль-



цевое пространство между трубкой и стержнемъ заполнено жидкостью, движущейся вслѣдствіе движенія стержня и силъ сѣпленія проявляющихся между стержнемъ и жидкостью; изъ внѣшнихъ силъ на жидкость дѣйствуютъ одна лишь сила тяжести. (черт. 7, I.).

*) См. Проф. Н. Е. Жуковскій. О треніи жидкости при большой разности скоростей ея струй. Докладъ пят. водопровод. съѣзду въ г. Кіевѣ, въ 1901 г.

Примемъ ось трубки за ось Z , причеъ за положительное направление ея возьмемъ направление движенія стержня. Ось X помѣстимъ въ вертикальной плоскости, проведенной черезъ ось Z , ось Y будетъ перпендикулярна къ этой плоскости.

Разсматриваемое нами движеніе будемъ изслѣдовать въ цилиндрическихъ координатахъ, ось Z которыхъ совпадаетъ съ вышеуказанной осью Z , плоскость же полярныхъ координатъ r и φ есть плоскость xy , причеъ ось X будетъ полярной осью, а углы φ будутъ отсчитываться отъ положительнаго направленія оси X противъ часовой стрѣлки.

Имѣя все вышеуказанное ввиду мы можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія жидкости въ трубкѣ.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ силы на единицу массы въ декартовыхъ координатахъ представляются такъ:

$$X = g \cos \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = -g \sin \alpha,$$

то на основаніи (137) для цилиндрическихъ координатъ имѣемъ:

$$R = g \cos \alpha \cos \varphi, \quad T = -g \cos \alpha \sin \varphi, \quad Z = -g \sin \alpha.$$

Мы можемъ положить, что движеніе происходитъ струйками, параллельными оси Z , симметрично относительно плоскости xz . На основаніи этого предположенія имѣемъ:

$$w_r = w_t = 0 \quad \text{и} \quad w_z = f(r, \varphi),$$

причеъ условіе симметріи даетъ:

$$w_z(r, \varphi, z) = w_z[r, (2\pi - \varphi), z].$$

Поэтому для нашего частнаго случая дифференціальныя уравненія движенія (143) переписутся такъ:

$$0 = g \cos \alpha \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$0 = -g \cos \alpha \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \dots \dots \dots (153)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = -g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right];$$

условіе сплошности (145) представится въ видѣ:

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = 0, \quad \dots \dots \dots (153, a)$$

т. е. w_z есть функція лишь отъ r и φ .

Теперь мы должны установить условия на границах. Концы трубки мы полагаем отрезанными плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, причем для точек

$$r = r_2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z = z_1 \text{ имѣемъ } p = p_1, \quad \dots \dots \dots (154)$$

$$r = r_2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z = z_2 \text{ имѣетъ } p = p_2, \quad \dots \dots \dots (155)$$

въ остальныхъ точкахъ начальной и конечной окружности трубки мы полагаемъ давление распределеннымъ по законамъ гидростатики.

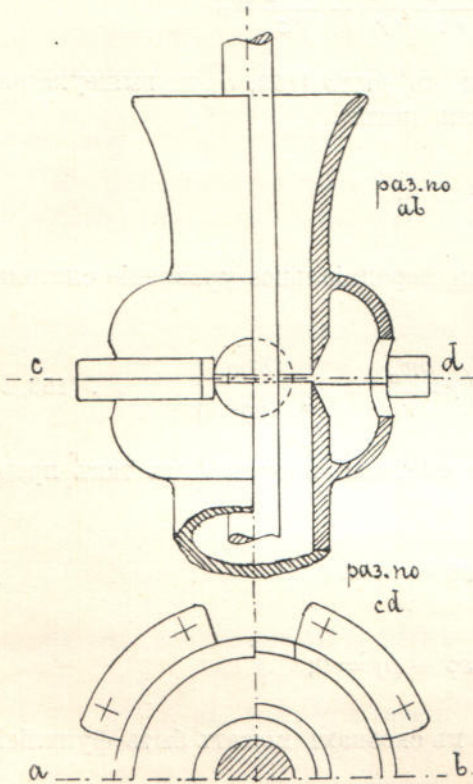
Такимъ образомъ для окружности $z = z_1, r = r_2$ должны имѣть:

$$p' = p_1 + \rho g r_2 \cos \varphi \cos z, \quad \dots \dots \dots (154, a)$$

а для окружности $z = z_2, r = r_2$:

$$p'' = p_2 + \rho g r_2 \cos \varphi \cos z \dots \dots \dots (155, a)$$

Чтобы осуществить такое распределение давлений мы присоединяемъ къ началу и концу трубки раструбы (черт. 8 и черт. 7, II), дающие жидкости возможность плавно втекать въ трубку и вытекать изъ нея. Между раструбами и краями трубки устроены капиллярныя круговыя щели, отдѣленные отъ всей массы жидкости кольцевыми камерами, сообщающимися съ жидкостью нѣсколькими отверстиями. Условия (154), (155) мы можемъ назвать гидростатическими условиями на границахъ.



Условия на внутренней поверхности трубки и поверхности стержня напишутся пользуясь уравнениями (99) § 35 и выражениемъ (152) для касательнаго напряжения N_t . Предполагая для общности материалы и состоянія поверхностей трубки и стержня разными, найдемъ условие на поверхности стержня въ видѣ

$$\nu_1(w_z - a) - \mu \frac{\partial w_z}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad (156)$$

гдѣ ν_1 коэффициентъ внѣшняго тренія жидкости о стержень; условіе на внутренней поверхности цилиндра напишется такъ:

$$\nu_2 w_z + \mu \left. \frac{\partial w_z}{\partial r} \right|_{r=r_2} = 0, \dots \dots \dots (157)$$

гдѣ ν_2 коэффициентъ внѣшняго тренія жидкости о внутреннюю поверхность трубы. Условія (156) и (157) являются гидродинамическими условіями на границахъ.

52. Приступимъ теперь къ интегрированію системы дифференціальныхъ уравненій (153) при соблюденіи условій (154, 155, 156, 157).

Лѣвая часть третьяго уравненія системы (153) можетъ быть такъ представлена:

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

или, полагая движеніе установившимся, т. е. $\frac{\partial w_z}{\partial t} = 0$, на основаніи выраженій (130) пишемъ:

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{\partial w_z}{\partial r} w_r + \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} \frac{w_t}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} w_z;$$

на основаніи условія сплошности въ видѣ (153, a) и вышеуказанныхъ зависимостей $w_r = w_t = 0$, находимъ:

$$\frac{dw_z}{dt} = 0.$$

Такимъ образомъ послѣднее дифференціальное уравненіе системы (153) переписется въ видѣ:

$$0 = -g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} \right] \dots \dots \dots (153, b)$$

Первыя два уравненія той же системы могутъ быть такъ представлены:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho g c \sin \alpha r - p) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho g c \sin \alpha r - p) = 0;$$

откуда заключаемъ, что выраженіе въ скобкахъ можетъ быть функціей одного лишь z , т. е.:

$$p = \rho g c \sin \alpha r \cos \varphi + \psi(z).$$

Подставляя это выражение для p въ уравненіе (153, b) и помня, что w_z отъ z не зависитъ, приходимъ къ заключенію, что $\psi'(z)$ не зависитъ отъ z , поэтому можетъ лишь быть нѣкоторой постоянной величиной c_1 , т. е. $\psi'(z) = c_1$, откуда:

$$\psi(z) = c_1 z + c_2;$$

такимъ образомъ

$$p = \rho g c s z r c s \varphi + c_1 z + c_2 \dots \dots \dots (158)$$

Опредѣленіе произвольныхъ постоянныхъ c_1 и c_2 производится на основаніи условий (154), (155). Имѣемъ:

$$p_1 = c_1 z_1 + c_2,$$

$$p_2 = c_1 z_2 + c_2.$$

Найдя отсюда c_1 и c_2 и подставивъ въ (158) находимъ для давленія p выраженіе въ окончательномъ видѣ:

$$p = \rho g c s z r c s \varphi + \frac{p_1 - p_2}{z_1 - z_2} (z - z_1) + p_1 \dots \dots \dots (159)$$

Полученное выраженіе для давленія p удовлетворяетъ и болѣе общимъ условіямъ на границахъ (154, a) и (155, a). Кромѣ того изъ (159) ясно, что во всемъ потокѣ жидкости давленіе распределяется по законамъ гидростатики.

Въ дальнѣйшемъ мы введемъ слѣдующія обозначенія: удѣльный вѣсъ жидкости обозначимъ черезъ Δ , т. е.

$$\rho g = \Delta;$$

замѣчая, что длина трубки будетъ $z_2 - z_1$, примемъ:

$$z_2 - z_1 = l; \dots \dots \dots (160)$$

кромѣ того ясно, что $(z_2 - z_1) s n a$ есть разстояніе по вертикали между начальной и конечной точками оси трубки; обозначимъ:

$$(z_2 - z_1) s n a = H_1 \text{ и } \frac{p_2 - p_1}{\Delta} = H_2, \dots \dots (161)$$

въ такомъ случаѣ высота H_u , гдѣ

$$H_u = (z_2 - z_1) s n a + \frac{p_2 - p_1}{\Delta} = H_1 + H_2 \dots \dots (162)$$

будетъ полный полезный напоръ, на который работаетъ нашъ шнуровой насосъ.

53. Вернемся теперь къ нашему дифференціальному уравненію (153, б). Замѣчая, что на основаніи (159) $\frac{dp}{dz} = c_1$, перепишемъ его въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} = c', \quad \dots \dots \dots (153, c)$$

гдѣ

$$c' = \frac{\rho g s n \alpha + c_1}{k \rho},$$

или, на основаніи (159), (160) и (162)

$$c' = \frac{\Delta(z_2 - z_1) s n \alpha + (p_2 - p_1)}{k \rho (z_2 - z_1)} = \frac{\Delta H_u}{\mu l}, \quad \dots \dots \dots (163)$$

Замѣтимъ, что c' есть постоянная величина.

Произведя дифференцирование въ (153, c) приводимъ уравненіе къ виду:

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} = c' \quad \dots \dots \dots (164)$$

Интеграль его содержитъ двѣ независимыхъ переменныхъ r и φ , причемъ относительно переменнаго φ онъ будетъ періодической функціей съ періодомъ 2π ; поэтому можемъ предположить его разложеннымъ въ рядъ Фурье по измѣняемости φ и представить такъ:

$$w_z = A_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi), \quad \dots \dots \dots (165)$$

гдѣ A_0 , A_m и B_m функціи одного лишь r .

На основаніи условія симметріи движенія относительно плоскости XZ , функція w_z не должна мѣняться при измѣненіи φ на $2\pi - \varphi$, что возможно лишь при $B_m = 0$; такимъ образомъ:

$$w_z = A_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \cos m\varphi. \quad \dots \dots \dots (165, a)$$

Подставляя это выраженіе для w_z въ (164), имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{d^2 A_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} A_m \right) \cos m\varphi + \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} - c' = 0.$$

Такъ какъ это равенство имѣеть мѣсто при произвольномъ φ , то должно быть:

$$\frac{d^2 A_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} A_m = 0, \dots \dots \dots (I)$$

$$\frac{d^2 A_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_o}{dr} - c' = 0 \dots \dots \dots (II)$$

Интегрируемъ сперва уравненіе (I). Полагая частный интеграль въ видѣ

$$A_m = Mr^k$$

и подставляя въ (I), получаемъ:

$$Mk(k-1)r^{k-2} + Mk r^{k-2} - Mm^2 r^{k-2} = 0,$$

откуда

$$k(k-1) + k - m^2 = 0, \text{ т. е. } k^2 - m^2 = 0 \text{ или } k = \pm m.$$

Отсюда полный интеграль уравненія (I) напишется въ видѣ:

$$A_m = M_m r^m + N_m r^{-m} \dots \dots \dots (III)$$

Интегрируемъ теперь второе уравненіе (II). Переписываемъ его такъ:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(A_o - \frac{c'r^2}{4} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(A_o - \frac{c'r^2}{4} \right) = 0;$$

полагая

$$\frac{d}{dr} \left(A_o - \frac{c'r^2}{4} \right) = \psi,$$

имѣемъ

$$\frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} = 0, \text{ или } \frac{d\psi}{\psi} + \frac{dr}{r} = 0, \text{ т. е. } d \lg \psi r = 0,$$

отсюда

$$\psi r = B_1 \text{ или } \psi = \frac{B_1}{r},$$

поэтому

$$\frac{d}{dr} \left(A_o - \frac{c'r^2}{4} \right) = \frac{B_1}{r};$$

интегрируя, находимъ окончательно:

$$A_o = B_1 \lg r + \frac{c'r^2}{4} + B_2 \dots \dots \dots (IV)$$

Такимъ образомъ полный интегралъ дифференціального уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка (164) будетъ:

$$w_z = \sum_{m=1}^{m=\infty} (M_m r^m + N_m r^{-m}) csm\varphi + B_1 lgr + \frac{c'r^2}{4} + B_2 \dots (166)$$

Произвольныя постоянныя M_m , N_m , B_1 и B_2 находится на основаніи условій на границахъ (156) и (157).

Вводя обозначенія $\frac{\mu}{\nu_1} = \phi_1$ и $\frac{\mu}{\nu_2} = \phi_2$ и подставляя въ (156), (157) найденное выше выраженіе для w_z , имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left[M_m (r^m - m\phi_1 r_1^{m-1}) + N_m (r_1^{-m} + m\phi_1 r_1^{-(m+1)}) \right] csm\varphi + B_1 \left(lgr_1 - \frac{\phi_1}{r_1} \right) + B_2 + \frac{c'r_1}{2} \left(\frac{r_1}{2} - \phi_1 \right) - a = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left[M_m (r_2^m + m\phi_2 r_2^{m-1}) + N_m (r_2^{-m} - m\phi_2 r_2^{-(m+1)}) \right] csm\varphi + B_1 \left(lgr_2 + \frac{\phi_2}{r_2} \right) + B_2 + \frac{c'r_2}{2} \left(\frac{r_2}{2} + \phi_2 \right) = 0.$$

Такъ какъ послѣднія уравненія должны удовлетворяться при произвольныхъ значеніяхъ φ , то должно быть:

$$M_m (r_1^m - m\phi_1 r_1^{m-1}) + N_m (r_1^{-m} + m\phi_1 r_1^{-(m+1)}) = 0, \dots (V)$$

$$M_m (r_2^m + m\phi_2 r_2^{m-1}) + N_m (r_2^{-m} - m\phi_2 r_2^{-(m+1)}) = 0,$$

и

$$B_1 \left(lgr_1 - \frac{\phi_1}{r_1} \right) + B_2 + \frac{c'r_1}{2} \left(\frac{r_1}{2} - \phi_1 \right) - a = 0,$$

$$B_1 \left(lgr_2 + \frac{\phi_2}{r_2} \right) + B_2 + \frac{c'r_2}{2} \left(\frac{r_2}{2} + \phi_2 \right) = 0 \dots (VI)$$

Легко показать, что корни системы (V) не могутъ быть отличны отъ нуля. Въ противномъ случаѣ должна была бы существовать зависимость

$$(r_1^m - m\phi_1 r_1^{m-1}) (r_2^{-m} - m\phi_2 r_2^{-(m+1)}) - (r_2^m + m\phi_2 r_2^{m-1}) (r_1^{-m} + m\phi_1 r_1^{-(m+1)}) = 0,$$

откуда легко получается:

$$\frac{\phi_1}{r_1} + \frac{\phi_2}{r_2} = 0,$$

что невозможно, такъ какъ, вообще говоря, величины ϕ_1 , ϕ_2 , r_1 и r_2 существенно положительны.

Въ томъ же случаѣ, если напр. $\phi_1 = 0$, то и ϕ_2 должно быть нулемъ, и вышеуказанное условіе должно принять видъ:

$$\frac{r_1^m}{r_2^m} = \frac{r_2^m}{r_1^m},$$

что тоже невозможно, такъ какъ $r_2 > r_1$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что всѣ $M_m = 0$ и $N_m = 0$, т. е.

$$w_z = B_1 lgr + \frac{c'r^2}{4} + B_2 \dots \dots \dots (166, a)$$

Опредѣляя постоянныя B_1 и B_2 изъ системы (VI), находимъ:

$$B_1 = \frac{c'[r_2^2 - r_1^2 + 2(\phi_1 r_1 + \phi_2 r_2)] + 4a}{4 \left(lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\phi_1}{r_1} - \frac{\phi_2}{r_2} \right)}, \dots \dots \dots (VII)$$

$$B_2 = \frac{\{c'[r_2^2 - r_1^2 + 2(\phi_1 r_1 + \phi_2 r_2)] + 4a\} \left(lgr_2 + \frac{\phi_2}{r_2} \right)}{4 \left(lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\phi_1}{r_1} - \frac{\phi_2}{r_2} \right)} - \frac{c'r_2}{2} \left(\frac{r_2}{2} + \phi_2 \right).$$

Въ предположеніи отсутствія скольженія жидкости вдоль стѣнки трубки и стержня, т. е. при $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = 0$ найдемъ:

$$B_1' = \frac{c'(r_2^2 - r_1^2) + 4a}{4lg \frac{r_1}{r_2}}, \dots \dots \dots (VIII)$$

$$B_2' = \frac{c'(r_1^2 lgr_2 - r_2^2 lgr_1) - 4algr_2}{4lg \frac{r_1}{r_2}}.$$

На основаніи выраженій (VII) w_z приметъ теперь окончательно слѣдующій видъ:

$$w_z = \frac{c'(r_2^2 - r_1^2 + 2\phi_1 r_1 + 2\phi_2 r_2) + 4a}{4 \left(lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\phi_1}{r_1} - \frac{\phi_2}{r_2} \right)} \left(lg \frac{r}{r_2} - \frac{\phi_2}{r_2} \right) + \frac{c'(r^2 - r_2^2 - 2\phi_2 r_2)}{4} \dots \dots \dots (166, b)$$

т. е. w_z есть функція одного лишь r .

54. Вычислимъ теперь расходъ Q жидкости, подаваемой разсматриваемымъ насосомъ въ единицу времени. Легко замѣтить, что

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} w_z d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} w_z r dr d\varphi,$$

гдѣ $d\sigma$ элементъ площади поперечнаго кольцевого сѣченія въ полярныхъ координатахъ. На основаніи (166, a)

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left(B_1 lgr + \frac{c'r^2}{4} + B_2 \right) r dr d\varphi, \dots (167)$$

или, послѣ интеграціи

$$Q = \pi \left[B_1 (r_2^2 lgr_2 - r_1^2 lgr_1) + \frac{c'}{8} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{(2B_2 - B_1)}{2} (r_2^2 - r_1^2) \right]. (167, a)$$

Подставляя сюда значенія для B_1 , B_2 и c' изъ (VII) и (163), можемъ написать:

$$Q = MH_u + Na, \dots (168)$$

гдѣ

$$M = \frac{\pi\Delta}{8\mu l} \left\{ 2(r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_1 r_1 + 2\psi_2 r_2) \left[(r_2^2 lgr_2 - r_1^2 lgr_1) - \left(lgr_2 + \frac{\psi_2}{r_2} + \frac{1}{2} \right) (r_2^2 - r_1^2) \right] + \right. \\ \left. + (r_2^2 - r_1^2) (r_1^2 - r_2^2 - 4r_2\psi_2) \left(lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2} \right) \right\} : \left(lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2} \right), \dots (IX)$$

$$N = - \frac{\pi \left[(r_2^2 lgr_2 - r_1^2 lgr_1) - \left(lgr_2 + \frac{\psi_2}{r_2} + \frac{1}{2} \right) (r_2^2 - r_1^2) \right]}{\left(lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2} \right)}.$$

Въ случаѣ отсутствія скольженія жидкости вдоль трубки и стержня, т. е. при $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, имѣемъ:

$$M_1 = \frac{\pi\Delta(r_2^2 - r_1^2)}{8\mu l} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{lg \frac{r_2}{r_1}} - (r_2^2 + r_1^2) \right], \dots (X)$$

$$N_1 = \pi \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2lg \frac{r_2}{r_1}} - r_1^2 \right).$$

Легко показать, что при условіи $r_2 \geq r_1$, имѣютъ мѣсто неравенства:

$$M_1 \leq 0, \quad N_1 \geq 0.$$

Поэтому, обращаясь къ выраженію для Q въ видѣ (168) находимъ, что съ измѣненіемъ скорости a отъ 0 до ∞ , Q , переходя черезъ нуль, мѣняетъ знакъ съ отрицательнаго на положительный. Причемъ для положительной скорости $a = -\frac{M_1 H_u}{N_1}$, расходъ $Q = 0$, т. е. затрачиваемая энергія идетъ на поддержаніе разности напоровъ на концахъ трубки.

Расходъ Q можетъ обратиться въ 0 еще и въ другомъ случаѣ. Представимъ себѣ, что трубка на выпускномъ концѣ закрыта и черезъ нее пропущенъ стержень подобно тому какъ это представлено на черт. 9. Въ такомъ случаѣ расходъ будетъ равенъ нулю и изъ (168) вытекаетъ, что

$$H_u = -\frac{N_1 a}{M_1} \dots \dots \dots (169)$$

Пользуясь выраженіями (159) и (162) для p и H_u , найдемъ для распредѣленія давления вдоль трубки такое выраженіе:

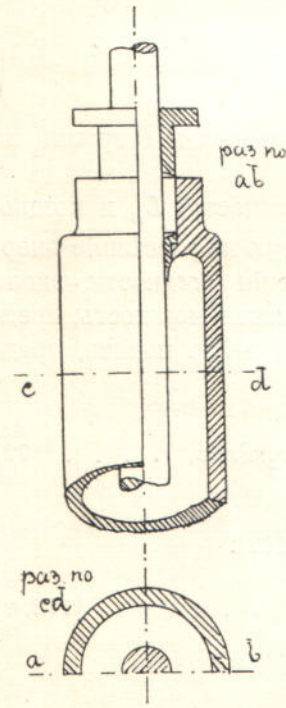
$$p = \Delta c s \arcsin \varphi + \frac{\Delta [H_u - (z_2 - z_1) s n \alpha]}{z_2 - z_1} (z - z_1) + p_1, \quad (170)$$

гдѣ вмѣсто H_u должно быть поставлено данное выше значеніе. Отсюда легко замѣтить, что вдоль прямой, параллельной оси трубки приращенія давления пропорціональны длинѣ. Изъ послѣдняго выраженія вытекаетъ, что при

$$\begin{aligned} H_u - (z_2 - z_1) s n \alpha &= 0, \\ p_2 &= p_1, \end{aligned}$$

т. е. давление вдоль трубки не мѣняется, а при

$$H_u - (z_2 - z_1) s n \alpha < 0$$



Черт. 9.

давление вдоль трубки убываетъ. Написавъ (169) въ видѣ:

$$(z_2 - z_1) s n \alpha + \frac{p_2 - p_1}{\Delta} = -\frac{N_1 a}{M_1},$$

опредѣлимъ отсюда предѣльную длину трубки $(z_2 - z_1)$. Если длина трубки будетъ больше найденной, то вся энергія расходуется на поддержаніе разности напоровъ на концахъ трубки, въ предположеніи, что p_1 и p_2 намъ заданы.

Обратно, при $a = 0$, располагаемая разность напоровъ H_u , противъ которой мы работаемъ, даетъ отрицательный расходъ

$$Q = M_1 H_u$$

т. е. жидкость движется въ отрицательномъ направленіи.

При $H_u = 0$, для любого значенія $a > 0$, будетъ создаваться нѣкоторый положительный расходъ Q .

55. Обратимся теперь къ составленію баланса энергіи разсматриваемаго нами движенія жидкости. Энергію будемъ относить къ единицѣ времени, т. е. разсмотримъ мощности.

Вся затраченная мощность L выразится такъ:

$$L = - 2\pi r_1 (z_2 - z_1) \mu \left. \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1} a, \dots \dots \dots (171)$$

гдѣ $2\pi r_1 (z_2 - z_1)$ рабочая поверхность стержня,

$$- \mu \left. \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1}$$

касательное усиліе на единицу площади со стороны стержня на жидкость.

Мощность L составляется изъ полезной мощности, L_u и мощности противъ вредныхъ сопротивленій, расходуемую на разсѣяніе энергіи, т. е. внутреннее треніе и работу скольженія жидкости вдоль стержня и внутренней поверхности трубки. Полезная мощность, представляющая работу перемѣщенія жидкости, какъ легко понять, представится такъ:

$$L_u = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (\Delta s n a dz + dp) w_z r dr d\varphi, \dots \dots (172)$$

или, на основаніи выраженія для расхода Q и (162):

$$L_u = \Delta Q H_u \dots \dots \dots (172, a)$$

Въ (172) интеграль

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} dp w_z r dr d\varphi$$

есть работа въ единицу времени противъ давленій, а интеграль

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \Delta s n a dz w_z r dr d\varphi$$

работа въ единицу времени противъ силы тяжести.

Мощность $L_{s,1}$, затраченная на скольженіе стержня вдоль жидкости представится въ такомъ видѣ:

$$L_{s,1} = - 2\pi r_1 (z_2 - z_1) \mu \left. \frac{dw_z}{dz} (a - w_z) \right|_{r=r_1} \dots \dots \dots (173)$$

гдѣ $(a - w_z)_{r=r_1}$ скорость стержня относительно жидкости; въ остальномъ выраженіе для $L_{s,1}$ сходно съ выраженіемъ для L .

Работа въ единицу времени скольженія жидкости относительно внутренней поверхности трубки будетъ:

$$L_{s,2} = - 2\pi r_2 (z_2 - z_1) \mu \left. \frac{dw_z}{dr} w_z \right|_{r=r_2} \dots \dots \dots (174)$$

Наконецъ аналогичная работа, затраченная на разсѣяніе энергіи внутри жидкости, на основаніи (107), напишется такъ:

$$D = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} \Phi r dr d\varphi dz, \dots \dots \dots (175)$$

гдѣ интегрированіе распространяется на весь объемъ трубки, занятый движущейся жидкостью. Такъ какъ жидкость несжимаема, то $(a + b + c) = 0$ и

$$\Phi = 2\mu(a^2 + b^2 + c^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2).$$

Въ нашемъ случаѣ $u = v = 0$, а w есть функція лишь отъ x и y , поэтому, на основаніи (49), пишемъ:

$$a = b = c = 0, \quad p_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad p_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad p_3 = 0.$$

Пользуясь (135) и имѣя ввиду, что w въ данномъ случаѣ зависитъ лишь отъ r , имѣемъ:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dw}{dr} \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{dw}{dr} \sin\varphi.$$

Отсюда:

$$\Phi = \mu \left(\frac{dw}{dr} \right)^2,$$

или

$$D = \mu \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{dw_z}{dr} \right)^2 r dr d\varphi dz;$$

пользуясь выраженіемъ (166, а) для w_z , послѣ интегрированія найдемъ:

$$D = 2\pi\mu (z_2 - z_1) \left\{ B_1^2 (\lg r_2 - \lg r_1) + \frac{c'^2}{16} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{B_1 c'}{2} (r_2^2 - r_1^2) \right\} (176)$$

На основаніи условій на границахъ (156) и (157) пишемъ:

$$\left| w_z \right|_{r=r_2} = -\psi_2 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_2},$$

$$\left| a - w_z \right|_{r=r_1} = -\psi_1 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1}.$$

Отсюда, на основаніи (173) и (174):

$$L_{s,1} = 2\pi r_1 (z_2 - z_1) \mu \psi_1 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1}^2 = 2\pi \mu \psi_1 (z_2 - z_1) r_1 \left(\frac{B_1}{r_1} + \frac{c' r_1}{2} \right)^2, (173, a)$$

$$L_{s,2} = 2\pi r_2 (z_2 - z_1) \mu \psi_2 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_2}^2 = 2\pi \mu \psi_2 (z_2 - z_1) r_2 \left(\frac{B_1}{r_2} + \frac{c' r_2}{2} \right)^2, (174, a)$$

Пользуясь выраженіемъ (167, a) для Q , на основаніи (172, a) имѣемъ:

$$L_u = \pi \Delta H_u \left\{ B_1 (r_2^2 \lg r_2 - r_1^2 \lg r_1) + \frac{c'}{8} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{(2B_2 - B_1)}{2} (r_2^2 - r_1^2) \right\}.$$

Исключая B_2 при помощи второго уравненія системы (IV), найдемъ:

$$L_u = \frac{\pi \Delta H_u}{8} \left\{ 8B_1 (r_2^2 \lg r_2 - r_1^2 \lg r_1) - (r_2^2 - r_1^2) \left[c' (r_2^2 - r_1^2 + 4r_2 \psi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1 \left(4 + \lg r_2 + \frac{\psi_2}{r_2} \right) \right] \right\} \dots \dots \dots (172, b)$$

Исключая a въ выраженіи (171) для L помощьюъ выраженія для B_1 въ (VII) и (166, a), получаемъ:

$$L = 2\pi \mu (z_2 - z_1) \left(B_1 + \frac{c' r_1^2}{2} \right) \left\{ B_1 \left(\lg \frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2} \right) + \frac{c'}{4} (r_2^2 - r_1^2 + \right. \\ \left. + 2r_1 \psi_1 + 2r_2 \psi_2) \right\} \dots \dots \dots (171, a)$$

Другое выраженіе для L получимъ, подставляя въ (171) значеніе $\left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1}$, вычисленное изъ (166, b), именно:

$$L = \frac{\pi [\Delta H_u k + 4a \mu (z_2 - z_1)] a}{2P}, \dots \dots \dots 171, b)$$

гдѣ

$$k = r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_2 r_2 + 2r_1^2 \left(\lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_2}{r_2} \right), \dots \dots \dots (XI)$$

$$P = \lg \frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1}.$$

При отсутствіи скольженія, т. е. при $\psi_1 = \psi_2 = 0$

$$k_1 = r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2 \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad \dots \dots \dots \quad (\text{XII})$$

$$P_1 = \lg \frac{r_2}{r_1}$$

Пользуясь полученными выраженіями легко провѣрить балансъ энергіи, который напишется такъ:

$$L = L_u + L_{s,1} + L_{s,2} + D.$$

56. Гидравлическій коэффициентъ τ_{nh} полезнаго дѣйствія шнурового насоса напишется въ видѣ:

$$\tau_{nh} = \frac{L_u}{L} \dots \dots \dots \quad (177)$$

Воспользовавшись значеніями L_u и L изъ (172, b) и (171, b) и подставивъ значенія B_1, B_2 и c' , найдемъ для τ_{nh} такое выраженіе

$$\tau_{nh} = \frac{\Delta H_u [M_2 \Delta H_u + N_2 \mu a (z_2 - z_1)]}{\mu a (z_2 - z_1) [\Delta H_u k + 4a \mu (z_2 - z_1)]} \dots \dots \dots \quad (178)$$

гдѣ

$$M_2 = \frac{1}{4} \left\{ 2(r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_1 r_1 + 2\psi_2 r_2) \left[(r_1^2 \lg r_1 - r_2^2 \lg r_2) + (\lg r_2 + \frac{\psi_2}{r_2} + \frac{1}{2}) (r_2^2 - r_1^2) \right] + (r_2^2 - r_1^2) (r_1^2 - r_2^2 - 4r_2 \psi_2) \left(\lg \frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2} \right) \right\},$$

$$N_2 = 2 \left\{ (r_1^2 \lg r_1 - r_2^2 \lg r_2) + \left(\lg r_2 + \frac{\psi_2}{r_2} + \frac{1}{2} \right) (r_2^2 - r_1^2) \right\} \dots \dots \quad (\text{XIII}).$$

Въ случаѣ отсутствія скольженія вдоль стѣнокъ трубки и стержня, т. е. $\psi_1 = \psi_2 = 0$, предыдущія выраженія сведутся къ:

$$M_2' = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{4} \left[r_2^2 - r_1^2 - (r_2^2 + r_1^2) \lg \frac{r_2}{r_1} \right], \quad \dots \dots \quad (\text{XIV})$$

$$N_2' = r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2 \lg \frac{r_2}{r_1}.$$

Если считать данными полный полезный напоръ H_u , на который долженъ работать нашъ насосъ и расходъ Q , то придется отыскивать скорость стержня a ; предполагается, конечно, что остальные величины, какъ-то: $r_1, r_2, l, \alpha, \mu, \psi_1, \psi_2, \Delta$ даны. Искомая величина a опредѣлится сразу изъ уравненія (168).

57. Полученными результатами мы можем воспользоваться для рѣшенія вопроса о движеніи вязкой жидкости по трубкѣ кольцевого или обыкновеннаго круговаго сѣченія.

Для этого достаточно въ выраженіяхъ для w_z и Q положить $a = 0$; кромѣ того, полезнымъ напоромъ, создающимъ теченіе, въ этомъ случаѣ нужно считать H'_u гдѣ

$$H'_u = -H_u.$$

Такимъ образомъ изъ (166, b) и (168) находимъ для кольцевого сѣченія:

$$w_z = \frac{\Delta H'_u}{4\mu l} \left[(r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_1 r_1 + 2\psi_2 r_2) \left(\lg \frac{r}{r_2} - \frac{\psi_2}{r_2} \right) + (r^2 - r_2^2 - 2\psi_2 r_2) \right. \\ \left. \left(\lg \frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2} \right) \right] : \left(\lg \frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2} \right), \\ Q = -MH'_u. \quad \dots (179)$$

Для трубки круговаго сѣченія нужно положить $r_1 = 0$. Найдемъ:

$$w_z = \frac{\Delta H'_u}{4\mu l} (r_2^2 - r^2 + 2\psi_2 r_2), \\ Q = \frac{\pi \Delta H'_u}{8\mu l} r_2^3 (r_2 + 4\psi_2). \quad \dots (179, a)$$

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $\psi_2 = 0$, получимъ:

$$Q = \frac{\pi \Delta H'_u}{8\mu l} r_2^4,$$

извѣстную формулу, выведенную Пуазейлемъ эмпирически изъ опытовъ при изслѣдованіи теченія воды по капиллярнымъ трубкамъ. Этой формулой можно пользоваться для опредѣленія коэффициента вязкости μ .

Шнуровой двигатель.

58. Рѣшимъ теперь обратную задачу: предположимъ существующимъ нѣкоторый полный (рабочій) напоръ H'_u и будемъ разсматривать наше устройство какъ двигатель, требуя чтобъ протекающая жидкость дала по оси стержня нѣкоторое усиліе σ на единицу рабочей поверхности, т. е. $2\pi r_1 l \sigma$ по всей поверхности его.

Полный рабочий напоръ H'_{uv} въ данномъ случаѣ, какъ легко понять, будетъ связанъ съ напоромъ H_u слѣдующимъ образомъ:

$$H'_{uv} = -H_u$$

т. е.

$$H'_{uv} = (z_1 - z_2) \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\Delta}$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ тѣ-же, что и въ предыдущемъ случаѣ, такъ что для давленія p получимъ выраженіе (159), условія же на границахъ (156) и (157) представятся такъ:

$$\mu \frac{\partial w_z}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = r_1(w_z - a) \Big|_{r=r_1} = \sigma, \dots \dots \dots (180)$$

$$r_2 w_z + \mu \frac{\partial w_z}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = 0.$$

Произвольныя постоянныя интегрированія B_1 и B_2 опредѣляются изъ уравненій (IV), причемъ первое уравненіе этой системы, на основаніи приведенныхъ условій на границахъ, можетъ быть нѣсколько измѣнено. Такимъ образомъ система (IV) замѣнится такой:

$$\mu \left(\frac{B_1}{r_1} + \frac{c'r_1}{2} \right) - \sigma = 0, \dots \dots \dots (XV)$$

$$B_1 \left(lgr_2 + \frac{\psi_2}{r_2} \right) + B_2 + \frac{c'r_2}{2} \left(\frac{r_2}{2} + \psi_2 \right) = 0.$$

Откуда находимъ:

$$B_1 = \frac{r_1(2l\sigma + \Delta H'_{uv} r_1)}{2l\mu}, \dots \dots \dots (XVI)$$

$$B_2 = -\frac{1}{4\mu l r_2} \left[2r_1(2l\sigma + \Delta H'_{uv} r_1) (r_2 lgr_2 + \psi_2) - \Delta H'_{uv} r_2^2 (r_2 + 2\psi_2) \right].$$

Подставляя эти значенія въ (166) и (167, a) найдемъ выраженія для w_z и Q .

Полезная мощность L_u нашего двигателя въ данномъ случаѣ выразится такъ:

$$L_u = 2\pi r_1 l \sigma a, \dots \dots \dots (181)$$

гдѣ a скорость стержня находится изъ (180) въ видѣ:

$$a = \frac{r_1 |w_z|_{r=r_1} - \sigma}{r_1} \dots \dots \dots (182)$$

Вся затраченная мощность L будетъ:

$$L = H'_u Q \dots \dots \dots (183)$$

Отсюда коэффициентъ полезнаго дѣйствія нашего двигателя будетъ:

$$\eta_{th} = \frac{L_u}{L} = \frac{2\pi r_1 l \alpha a}{H'_u Q}.$$

Балансъ энергіи напишется подобно предыдущему случаю въ видѣ:

$$L = L_u + L_{s,1} + L_{s,2} + D,$$

гдѣ

$$L_{s,1} = 2\pi r_1 l \alpha (w_z - a)$$

работа тренія жидкости о стержень; L и L_u даны выше; $L_{s,2}$ и D имѣють прежнія значенія (176) и (174, a).

Вращательное движеніе вязкой жидкости.

59. Въ настоящемъ параграфѣ мы рассмотримъ такой вопросъ: въ вязкой жидкости равномерно вращается система параллельныхъ, равноудаленныхъ плоскостей вокругъ нѣкоторой оси, перпендикулярной къ нимъ; плоскости предполагаются безграничными. Опредѣлить движеніе жидкости.

Здѣсь въ общемъ случаѣ допускается скольженіе жидкости относительно плоскостей; для простоты предположимъ, что коэффициентъ внѣшняго тренія относительно всѣхъ плоскостей одинаковъ, причемъ изъ силъ внѣшнихъ, дѣйствующихъ на массу жидкости пусть существуетъ лишь одна сила тяжести.

Изъ дальнѣйшаго будетъ ясно, что для рѣшенія вопроса достаточно рассмотреть движеніе жидкости между парой парой плоскостей. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ будемъ пользоваться цилиндрическими координатами. Ось вращенія примемъ за ось Z , направленную вертикально вверхъ. Начало O помѣстимъ на серединѣ разстоянія между двумя плоскостями, въ остальномъ будемъ придерживаться черт. 6. Примемъ разстояніе между плоскостями равными $2h$; уравненія ихъ будутъ: $z = +h$, $z = -h$.

Движеніе жидкости предположимъ установившимся и совершающимся въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси вращенія. На этомъ основаніи

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} = \frac{\partial w_t}{\partial t} = \frac{\partial w_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0;$$

кромѣ того $w_z = 0$ и $R = T = 0$, $z = -g$.

Въ общемъ случаѣ жидкость благодаря вязкости и внѣшнему тренію о плоскости будетъ двигаться отъ центра къ периферіи по криволинейнымъ плоскимъ траекторіямъ, лежащимъ въ горизонтальныхъ плоскостяхъ. Мы можемъ принять траекторіи всѣхъ частицъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости тождественными, т. е. движеніе жидкости симметричнымъ относительно оси вращенія. Это обстоятельство позволяетъ утверждать, что

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0,$$

т. е. w_r , w_t и p суть функціи одного лишь r и z

60. Обратимся теперь къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія (143). На основаніи (130) лѣвыя части первыхъ двухъ уравненій перепишутся такъ:

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r} = \frac{\partial w_r}{\partial t} + \frac{\partial w_r}{\partial r} w_r + \frac{\partial w_r}{\partial r} \frac{w_t}{r} + \frac{\partial w_r}{\partial z} w_z - \frac{w_t^2}{r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(w_t r)}{dt} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(w_t r)}{\partial t} + \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} w_r + \frac{\partial(w_t r)}{\partial \varphi} \frac{w_r w_t}{r} + \frac{\partial(w_t r)}{\partial z} w_z \right\}.$$

Поэтому, на основаніи всего вышесказаннаго, дифференціальныя уравненія движенія въ данномъ случаѣ представляются въ видѣ:

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} w_r - \frac{w_t^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + k \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(w_r r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right\},$$

$$\frac{w_r}{r} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} = k \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2} \right\}, \dots \dots \dots (184)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Условіе сплошности (145, a) приметъ видѣ:

$$\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} = 0, \dots \dots \dots (185)$$

откуда заключаемъ, что $w_r r$ есть функція одного лишь z , т. е.

$$w_r r = \phi(z) \dots \dots \dots (185, a)$$

Кромѣ того изъ (185) вытекаетъ, что

$$r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_r = 0. \dots \dots \dots (185, b)$$

Послѣднее уравненіе системы (184), послѣ интегрированія, даетъ:

$$p = -\Delta z + \rho\Phi(r), \dots \dots \dots (186)$$

причемъ нужно замѣтить, что $\phi(z)$ и $\Phi(r)$ пока произвольныя функции, опредѣляемыя изъ дальнѣйшихъ условий.

На основаніи (185, a), (185, b) и (186), первое уравненіе системы (184) перепишется такъ:

$$-\frac{w_r^2 + w_t^2}{r} = -\Phi'(r) + k \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2},$$

или

$$-(w_r^2 + w_t^2) = -r\Phi'(r) + k \frac{\partial^2 w_r r}{\partial z^2},$$

откуда

$$w_r^2 + w_t^2 = r\Phi'(r) - k\phi''(z) \dots \dots \dots (187)$$

Замѣчая, что

$$w_r^2 + w_t^2 = v^2,$$

можемъ сказать, что квадратъ скорости въ каждой точкѣ жидкости есть сумма двухъ функций: функции отъ r и функции отъ z . Помножая (187) на r^2 и принимая во вниманіе (185, a), найдемъ:

$$(w_r r)^2 = r^3\Phi'(r) - kr^2\phi''(z) - \phi^2(z) \dots \dots \dots (188)$$

61. Мы можемъ сказать, что (185, a), (186) и послѣднее уравненіе рѣшаютъ нашу задачу вполне, если будутъ опредѣлены функции $\Phi(r)$ и $\phi(z)$. Для этого воспользуемся вторымъ уравненіемъ системы (184), и кромѣ того введемъ условія на границахъ.

Послѣ дифференцированія въ правой части второго уравненія (184), легко придать ему такой видъ:

$$\frac{w_r r}{r^2} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} = k \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_t r)}{\partial z^2} \right\}.$$

Принимая во вниманіе (185, a) послѣ упрощеній, получимъ:

$$\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(w_t r)}{\partial z^2} = \left\{ \frac{\phi(z) + k}{kr} \right\} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} \dots \dots \dots (189)$$

Этому дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ второго порядка должна удовлетворять функция $w_t r$. Подставляя сюда значеніе этой функции изъ (188) получимъ одну дифференціальную зависимость между функциями $\Phi(r)$ и $\phi(z)$.

62. Обратимся теперь къ условіямъ на границахъ. Принимая скольженіе жидкости относительно движущихся плоскостей, мы воспользуемся условіями (99) § 35, примѣнительно къ цилиндрическимъ координатамъ. Такъ какъ для нашего случая на основаніи (152)

$$T_r = \mu \frac{\partial w_t}{\partial z}, \quad T_t = \mu \frac{\partial w_r}{\partial z},$$

и обозначая черезъ ω угловую скорость вращенія плоскостей, получимъ для плоскости $z = +h$ искомыя условія въ видѣ:

$$\nu_1(\omega r - w_t) \Big|_{z=+h} = \mu \frac{\partial w_t}{\partial z} \Big|_{z=+h}, \quad \nu_1 w_r \Big|_{z=+h} = -\mu \frac{\partial w_r}{\partial z} \Big|_{z=+h} \quad (190, a)$$

а для плоскости $z = -h$

$$\nu_1(\omega r - w_t) \Big|_{z=-h} = -\mu \frac{\partial w_t}{\partial z} \Big|_{z=-h}, \quad \nu_1 w_r \Big|_{z=-h} = \mu \frac{\partial w_r}{\partial z} \Big|_{z=-h}. \quad (190, b)$$

Эти же условія могутъ быть переписаны и такъ:

$$\begin{aligned} \nu_1(\omega r^2 - w_t r) \Big|_{z=+h} &= \mu \frac{\partial(w_t r)}{\partial z} \Big|_{z=+h}, & \nu_1(\omega r^2 - w_t r) \Big|_{z=-h} &= -\mu \frac{\partial(w_t r)}{\partial z} \Big|_{z=-h}, \\ \nu_1(w_r r) \Big|_{z=+h} &= -\mu \frac{\partial(w_r r)}{\partial z} \Big|_{z=+h}, & \nu_1(w_r r) \Big|_{z=-h} &= \mu \frac{\partial(w_r r)}{\partial z} \Big|_{z=-h} \end{aligned} \quad \dots \quad (190, c)$$

Теперь мы можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія о видѣ функции $\Phi(r)$, входящей въ (186). Для этого, на основаніи (188), пишемъ:

$$w_t r = \sqrt{R - kr^2 Z'' - Z^2}, \quad \dots \quad (191)$$

гдѣ для сокращенія принято $r^3 \Phi'(r) = R$ и $\psi(z) = Z$; кромѣ того обозначимъ $\frac{\mu}{\nu_1} = \lambda$ и

$$\begin{aligned} Z_{z=+h} &= a_0, \quad Z'_{z=+h} = a_1, \quad Z''_{z=+h} = a_2, \quad Z'''_{z=+h} = a_3, \\ Z_{z=-h} &= a'_0, \quad Z'_{z=-h} = a'_1, \quad Z''_{z=-h} = a'_2, \quad Z'''_{z=-h} = a'_3. \end{aligned} \quad (192)$$

Имѣя все вышесказанное ввиду, на основаніи первыхъ двухъ условій на границахъ (190, c) и выраженія для $w_t r$ (191), пишемъ:

$$\begin{aligned} \omega r^2 - \sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2} &= -\lambda \frac{kr^2 a_3 + 2a_0 a_1}{2\sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2}} \\ \omega r^2 - \sqrt{R - kr^2 a'_2 - a'_0{}^2} &= \lambda \frac{kr^2 a'_3 + 2a'_0 a'_1}{2\sqrt{R - kr^2 a'_2 - a'_0{}^2}} \end{aligned} \quad \dots \quad (193)$$

Условія симметріи движенія относительно плоскости $z=0$ приводят насъ къ заключенію, что $(w_t r)_{z=+h} = (w_t r)_{z=-h}$ при произвольномъ r , т. е.

$$R - kr^2 a_2 - a_0^2 = R - kr^2 a'_2 - a_0'^2.$$

Такъ какъ это должно быть вѣрно при произвольномъ r , то отсюда прямо слѣдуетъ, что

$$a_0 = a_0' \text{ и } a_2 = a_2'.$$

Отсюда находимъ, что правыя части въ равенствѣ (193) должны быть тоже равны при произвольныхъ значеніяхъ r , слѣдовательно:

$$a_3 = -a_3' \text{ и } a_1 = -a_1'.$$

Такимъ образомъ, имѣя ввиду обозначенія (192), функція Z должна подчиняться слѣдующимъ условіямъ:

$$a_0 = a_0', \quad a_1 = -a_1', \quad a_2 = a_2', \quad a_3 = -a_3'; \dots \dots \dots (194)$$

кромѣ того, обращаясь къ послѣднимъ двумъ условіямъ (190, c) мы можемъ ихъ такъ представить:

$$a_0 = -\lambda a_1, \quad a_0' = \lambda a_1',$$

поэтому, замѣчая, что второе уравненіе (194) есть слѣдствіе послѣднихъ двухъ и системы (194), можемъ систему (194) замѣнить такой:

$$a_0 = a_0', \quad a_0 = -\lambda a_1, \quad a_0' = \lambda a_1', \quad a_2 = a_2', \quad a_3 = -a_3' \dots \dots (194, a)$$

Отсюда восемь неизвѣстныхъ могутъ быть опредѣлены черезъ три какихъ-нибудь изъ нихъ. Напримѣръ, если

$$a_0 = \alpha, \quad a_2 = \beta, \quad a_3 = \gamma,$$

то \dots \dots \dots (195)

$$a_0' = \alpha, \quad a_1 = -\frac{\alpha}{\lambda}, \quad a_1' = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad a_2' = \beta, \quad a_3' = -\gamma.$$

Изъ всего этого вытекаетъ, что условія (193) могутъ быть сведены къ одному, имѣющему видъ:

$$\omega r^2 - \sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2} = \lambda \frac{kr^2 a'_2 + 2a_0 a_1'}{2\sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2}}, \dots \dots (196)$$

Такъ какъ это равенство должно имѣть мѣсто при произвольныхъ значеніяхъ r , то оно является уравненіемъ для опредѣленія вида функціи R въ предположеніи, что функція Z , т. е. $\psi(z)$ намъ извѣстна. Изъ (196) легко находимъ, что

$$R = \frac{\omega^2}{2} r^4 + k \left(a_2 - \frac{1}{2} \lambda a_3 \right) r^2 + \frac{1}{2} \omega r^2 \sqrt{\omega^2 r^4 - 2\lambda(kr^2 a_3 + 2a_0 a_1)} + a_0^2 - \lambda a_0 a_1 \dots \dots \dots (197)$$

Замѣтимъ, что здѣсь вошелъ одинъ лишь знакъ, между тѣмъ, при нахожденіи радикала $\sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2}$ изъ квадратнаго уравненія (196) получается два знака. Но дѣло въ томъ, что если положить $\lambda = 0$ (т. е. отсутствіе скользянія) этотъ радикаль, представляющій величину $w_r r|_{z=\pm h}$, долженъ обратиться въ ωr^2 , что возможно лишь въ томъ случаѣ, если взять корень квадратнаго уравненія со знакомъ плюсь.

Зная видъ функціи R , мы тѣмъ самымъ находимъ распредѣленіе давленій въ рассматриваемомъ случаѣ. Дѣйствительно, изъ соотношенія принятаго для (191)

$$r^3 \Phi'(r) = R$$

находимъ, что

$$\Phi(r) = \int \frac{R dr}{r^3} + C \dots \dots \dots (198)$$

Подставляя сюда изъ (197) значеніе функціи R , найдемъ, послѣ интеграціи, $\Phi(r)$. Эта функція, подставленная въ (186)

$$p = -\Delta z + \rho \Phi(r), \dots \dots \dots (186)$$

рѣшаетъ вопросъ о распредѣленіи давленій. Мы уже указали, что въ R входитъ три произвольныхъ постоянныхъ, C будетъ четвертая. Двѣ изъ нихъ можно опредѣлить задавая давленія на окружностяхъ: $z = 0$, $r = r_1$ и $z = 0$, $r = r_2$; остается двѣ произвольныхъ постоянныхъ.

63. Теперь мы можемъ въ общихъ чертахъ указать путь къ интегрированію уравненія (189) при соблюденіи условій на границахъ (190, с) *). Видъ интеграла нами уже найденъ:

$$w_r r = \sqrt{R - kr^2 Z'' - Z^2}; \dots \dots \dots (191)$$

*) Подробное рѣшеніе и изслѣдованіе этого вопроса, ввиду его сложности и громоздкости, мы предполагаемъ дать въ отдѣльной статьѣ. Здѣсь мы ограничимся нѣкоторыми частными случаями.

подставляя это выражение въ (189) и произведя упрощенія получимъ:

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{d^2 R}{dr^2} R - 2 \frac{d^2 R}{dr^2} kr^2 Z'' - 2 \frac{d^2 R}{dr^2} Z^2 - \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + 6 kr Z'' \frac{dR}{dr} - 2kr^2 Z^{IV} R - \\
 & - 4Z'^2 R - 2 \frac{Z}{rk} \frac{dR}{dr} R + 2Z \frac{dR}{dr} rZ'' + 2 \frac{Z^3}{kr} \frac{dR}{dr} - 2 \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} R + \\
 & + 2 \frac{Z^2}{r} \frac{dR}{dr} + 2k^2 r^4 Z^{IV} Z'' + 2kr^2 Z^{IV} Z^2 + 4Z'^2 kr^2 Z'' - k^2 r^4 Z'''^2 - \\
 & - 4kr^2 Z'' Z Z' - 4k^2 r^2 Z''^2 = 0. \dots \dots \dots (199).
 \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для R (197), освобождаясь отъ радикаловъ и располагая результатъ по степенямъ r , получимъ въ лѣвой части цѣлый полиномъ относительно r , коэффициенты котораго будутъ зависѣть отъ функции Z и ея производныхъ до четвертой включительно. Такъ какъ этотъ полиномъ долженъ быть нулемъ при произвольныхъ значеніяхъ r , то, приравнивая его коэффициенты нулю, мы найдемъ цѣлый рядъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и задача сведется къ отысканію функций Z , удовлетворяющей одновременно всѣмъ этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

64. Для примѣра рассмотримъ частный случай: предположимъ, что нѣтъ скольженія жидкости относительно вращающихся плоскостей, т. е. $\nu_1 = \infty$ или $\lambda = 0$. Въ такомъ случаѣ изъ (197) получается, что

$$R = \omega^2 r^4 + ka_2 r^2 + a_0^2 \dots \dots \dots (200)$$

Подставивъ это выражение для R въ (199) и расположивъ по степенямъ r , получимъ полиномъ шестой степени относительно r .

Приравнявъ коэффициенты его нулю, сразу найдемъ, что $Z = 0$, т. е.

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_0' = a_1' = a_2' = a_3' = 0.$$

Отсюда $R = \omega^2 r^4$, или, на основаніи (191):

$$w_t = \omega r, \dots \dots \dots (201)$$

т. е. радіального движенія жидкости нѣтъ и вся жидкая масса вращается вокругъ оси Z какъ твердое тѣло съ угловой скоростью ω . Подставляя полученное выше значеніе для R въ (198), найдемъ, что

$$\Phi(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2} + C,$$

откуда, на основаніи (186)

$$p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \Delta z + C_1, \dots \dots \dots (202)$$

т. е. поверхности равнаго давления суть параболоиды вращения вокругъ оси Z ; результатъ извѣстный изъ гидравлики.

Разсмотримъ теперь обратный случай: рѣшимъ вопросъ о возможности вращательнаго движенія нашей жидкости въ разсматриваемомъ случаѣ (т. е. $w_r = 0$) при наличности скольженія относительно плоскостей, т. е. $\lambda > 0$.

Мы видѣли, что предположеніе $w_r = 0$ равносильно положенію $Z = 0$, т. е. на основаніи (197) $R = \omega^2 r^4$, или на основаніи (191), $w_t = \omega r$; другими словами результатъ получился тотъ же, что и при предположеніи $\lambda = 0$. Т. е. жидкость можетъ имѣть чисто вращательное движеніе лишь въ случаѣ отсутствія скольженія ея относительно вращающихся плоскостей; въ этомъ случаѣ она движется какъ твердое тѣло.

65. Обратимся къ разсмотрѣнію болѣе общаго случая. Откажемся отъ поставленныхъ нами пограничныхъ условій (190,с); въ такомъ случаѣ мы имѣемъ вообще дѣло съ нѣкоторымъ симметричнымъ относительно оси Z теченіемъ вязкой жидкости, въ смыслѣ указанномъ выше. Для него имѣютъ мѣсто полученныя выше уравненія и соотношенія:

$$w_r r = Z, \dots\dots\dots (185, a)$$

$$w_t r = \sqrt{R - kr^2 Z'' - Z^2}, \dots\dots\dots (191)$$

$$\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(w_t r)}{\partial z^2} = \frac{Z + k}{k} \frac{1}{r} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r}, \dots\dots (189)$$

$$p = -\Delta z + \rho\Phi(r). \dots\dots\dots (186)$$

Предположимъ теперь $w_r = w = const.$ для $r = r_1$. Въ такомъ случаѣ

$$w_r r = w r_1 = a, \dots\dots\dots (203)$$

т. е. $Z = a$, и изъ (191) слѣдуетъ, что $w_t r$ есть функція одного лишь r , причемъ

$$w_t r = \sqrt{R - a^2}; \dots\dots\dots (204)$$

дифференціальное уравненіе (189) переписется такъ:

$$\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} = \frac{A}{r} \frac{\partial(w_t r)}{\partial r},$$

гдѣ $\frac{a + k}{k} = A$. Представивъ это уравненіе въ видѣ:

$$\frac{d \left[\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} \right]}{\frac{\partial(w_t r)}{\partial r}} = A \frac{dr}{r},$$

находимъ, что:

$$d \lg \frac{\partial(w_t r)}{\partial r} = d \lg r^A,$$

отсюда, послѣ интегрированія

$$\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} = C_1' r^A,$$

или, окончательно

$$w_t r = C_1 r^{A+1} + C_2 \dots \dots \dots (205)$$

Произвольныя постоянныя C_1 и C_2 опредѣляются заданіемъ w_t на двухъ какихъ либо цилиндрическихъ поверхностяхъ $r = r_1$ и $r = r_2$.

Траекторія какой либо частицы жидкости можетъ быть легко опредѣлена на основаніи соотношеній:

$$w_r = \frac{dr}{dt}, \quad w_t = r \frac{d\varphi}{dt};$$

дѣля первое на второе, находимъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{w_r r}{w_t},$$

или, на основаніи (203) и (205):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{C_1 r^A + C_2 r^{-1}},$$

отсюда, послѣ интегрированія, находимъ уравненіе траекторіи въ полярныхъ координатахъ въ видѣ:

$$a\varphi = \frac{C_1 r^{A+1}}{A+1} + C_2 \lg C_3 r, \dots \dots \dots (206)$$

гдѣ постоянная C_3 опредѣляется по начальной точкѣ, черезъ которую проходитъ рассматриваемая траекторія.

Опредѣливъ изъ (204) функцію R , мы находимъ на основаніи (198) функцію $\Phi(r)$, а слѣдовательно, пользуясь (186), распредѣленіе давленій въ рассматриваемомъ случаѣ.

66. Полученные результаты даютъ возможность рассмотреть случай, изслѣдованный *M. Couette* въ его работѣ, посвященной опредѣленію коэффициента внутренняго тренія жидкостей *).

Вопросъ сводился къ изслѣдованію движенія жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, изъ которыхъ каждый въ общемъ случаѣ вращался съ нѣкоторой постоянной угловой скоростью.

Полагая общую ось цилиндровъ вертикальной и дѣлая вполнѣ допустимое предположеніе, что $w_r = 0$, мы сразу приходимъ къ случаю, рассмотрѣнному въ предыдущемъ параграфѣ, причемъ здѣсь $A = 1$, такъ какъ $a = 0$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$w_t = C_1 r + C_2 r^{-1} \dots \dots \dots (207)$$

См. *M. Couette. Etudes sur le frottement des liquides. Annales de chimie et de physique. 1890 г. стр. 436.*

Постоянные C_1 и C_2 найдутся на основании условий на границахъ. Предположимъ, что цилиндръ радиуса r_1 вращается съ угловой скоростью ω_1 , а цилиндръ радиуса r_2 —съ угловой скоростью ω_2 , и что $r_1 < r_2$. Касательное напряжение T_z , на основании (152) представляется такъ:

$$T_z = \mu \left(\frac{\partial w_t}{\partial r} - \frac{w_t}{r} \right),$$

что для нашего случая даетъ:

$$T_z = -\frac{2\mu C_2}{r^2} \dots \dots \dots (208)$$

Условия на границахъ, на основании (99), пишутся въ видѣ:

$$\nu_1(w_t - \omega_1 r_1) \Big|_{r=r_1} = \mu \left(\frac{\partial w_t}{\partial r} - \frac{w_t}{r} \right) \Big|_{r=r_1},$$

$$\nu_2(w_t - \omega_2 r_2) \Big|_{r=r_2} = -\mu \left(\frac{\partial w_t}{\partial r} - \frac{w_t}{r} \right) \Big|_{r=r_2}.$$

Поэтому для опредѣленія постоянныхъ C_1 и C_2 получатся такіа уравненія:

$$\nu_1(C_1 r_1 + C_2 r_1^{-1} - \omega_1 r_1) = -\mu \frac{2C_2}{r_1^2},$$

$$\nu_2(C_1 r_2 + C_2 r_2^{-1} - \omega_2 r_2) = \mu \frac{2C_2}{r_2^2}.$$

Предполагая наружный цилиндръ неподвижнымъ и пренебрегая скольженіемъ жидкости, получимъ эти условия въ такомъ видѣ:

$$C_1 r_1 + C_2 r_1^{-1} = \omega_1 r_1,$$

$$C_1 r_2 + C_2 r_2^{-1} = 0.$$

Рѣшая эти уравненія относительно C_1 и C_2 , находимъ:

$$C_1 = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad C_2 = \frac{\omega_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Источникомъ движенія жидкости будетъ теперь внутренній вращающійся цилиндръ, къ которому долженъ быть приложенъ моментъ M , выражающійся такъ:

$$M = -2\pi r_1 h T_z r_1, \dots \dots \dots (209)$$

гдѣ h высота по оси цилиндра разсматриваемаго слоя жидкости. Пользуясь полученнымъ выше выраженіемъ для T_z , имѣемъ:

$$M = 4\pi h \mu C_2$$

или

$$M = \frac{4\pi h \mu \omega_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \dots \dots \dots (210)$$

На этомъ мы закончимъ главу о приложеніяхъ вышеизложенной теоріи *).

Глава XII

Численныя значенія коэффициентовъ, входящихъ въ основныя уравненія.

67. Въ настоящей главѣ мы дадимъ значенія коэффициентовъ, введенныхъ нами въ основныя уравненія. Не вдаваясь въ подробное разсмотрѣніе методовъ ихъ нахождения, что завело бы насъ очень далеко, мы приведемъ рядъ чиселъ, характеризующихъ разныя жидкости; числа эти дадутъ возможность, въ случаѣ надобности, производить реальные подсчеты. Коэффициенты, входяшіе въ предыдущіе формулы, слѣдующіе: μ —коэффициентъ внутренняго тренія (или вязкости), η —коэффициентъ внѣшняго тренія, λ —такъ называемый второй коэффициентъ вязкости. Этотъ послѣдній коэффициентъ тѣсно связанъ съ сжимаемостью жидкости, съ которой теперь все больше и больше начинаютъ считаться на практикѣ, такъ какъ такое явленіе какъ напимѣръ гидравлическій ударъ всецѣло зависитъ отъ этого свойства жидкости. Поэтому мы дадимъ значенія коэффициента сжимаемости s для нѣкоторыхъ жидкостей. Замѣтимъ еще, что въ основныя уравненія движенія вязкой жидкости входитъ кинематическій коэффициентъ трѣнія $k = \frac{\mu}{\rho}$, гдѣ ρ плотность жидкости. Такъ какъ значенія для ρ могутъ быть найдены всюду, то мы здѣсь ихъ приводить не будемъ.

68. Изъ основнаго соотношенія (65) размѣрность коэффициента μ представится такъ:

$$[\mu] = [L^{-1}MT^{-1}] \dots \dots \dots (211)$$

Таблица I даетъ значенія этого коэффициента для разныхъ жидкостей и газовъ при разныхъ температурахъ (по Цельсію) въ абсолютной системѣ единицъ [C. G. S.]. Кромѣ того въ этой же таблицѣ даны значенія коэффициента $k_1 = \frac{\mu}{\Delta}$, гдѣ Δ удѣльный вѣсъ жидкости**). Такъ какъ въ абсолютной системѣ единицъ $\Delta = g\rho = 981\rho$, то отсюда $k = 981 k_1$.

*) Нѣкоторые вопросы, разобранные здѣсь въ иномъ изложеніи можно найти въ курсахъ:

W. Wien. Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900 стр. 269.

H. Lorenz. Lehrbuch der technischen Physik. III т. стр. 426.

**) См. R. Biel. Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Berlin, 1907. Mittel. über Forschungs. Heft 44

Таблица I.

	0°		5°		10°		20°		30°		100°		1200°	
	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$
Рыбное масло	25,3	27,7	~6,27	~6,8	3,7	4,07	1,8	1,98	0,99	1,1	—	—	—	—
Вода	0,01775	0,01775	0,01515	0,01515	0,0131	0,0131	0,0101	0,0101	0,00805	0,0081	~0,00298	~0,0031	—	—
Эфиръ	—	—	—	—	—	—	0,0026	0,00353	—	—	—	—	—	—
Ртуть	—	—	—	—	—	—	0,016	0,00118	—	—	—	—	—	—
Жидкая углекислота при $p=59 \text{ kg./cm.}^2$	—	—	—	—	—	—	0,000712	0,000862	—	—	—	—	—	—
Водяной паръ	—	—	—	—	—	—	0,0000975	0,135	—	—	—	—	—	—
Воздухъ	0,0001714	0,137	0,000173	0,141	0,000176	0,146	0,000188	0,161	0,000186	0,165	0,0002113	0,23	0,0005481	2,36
Кислородъ	—	—	—	—	—	—	0,000198	0,153	—	—	—	—	—	—
Азотъ	—	—	—	—	—	—	0,000174	0,153	—	—	—	—	—	—
Водородъ	0,0000864	1,07	—	—	—	—	0,000097	1,21	—	—	0,0001075	1,7	0,000302	18,8

при $p = 1 \text{ кгр./см.}^2$

О. Е. Meyer *) для воды при разных температурах далъ такую элементарную зависимость:

$$\mu = \frac{0,01775}{1 + 0,0331t + 0,000244t^2}, \dots \dots \dots (212)$$

гдѣ t въ градусахъ Цельсія, μ въ абсолютной системѣ единицъ [С. G. С].

Изъ приведенной таблицы замѣчаемъ, что для жидкостей коэффициентъ внутренняго тренія μ съ возрастаніемъ температуры убываетъ, для газовъ наоборотъ—возрастаетъ.

Коэффициентъ μ для воды почти не зависитъ отъ давленія, тоже имѣетъ мѣсто и для газовъ при давленіяхъ достаточно удаленныхъ отъ точекъ сжиженія ихъ. Кромѣ того нужно замѣтить, что для газовъ, для которыхъ плотность прямо—пропорціональна давленію, коэффициентъ k обратно—пропорціоналенъ давленію; этимъ отчасти и объясняются необычайно большія потери въ трубопроводахъ для разрѣженныхъ газовъ.

69. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію коэффициента λ . Если вспомнимъ сказанное въ § 32, то на основаніи зависимостей (88) заключаемъ, что размѣрность λ должна быть та же, что и μ , т. е.

$$[\lambda] = [L^{-1} MT^{-1}]; \dots \dots \dots (213).$$

кромѣ того, пользуясь гипотезой Стокса, по которой

$$3\lambda + 2\mu = 0,$$

имѣемъ $\lambda = -\frac{2}{3} \mu$, такъ что особыхъ вычисленій для нахождения λ производить не приходится.

Если бы мы отказались отъ гипотезы Стокса, то опредѣленіе λ пришлось бы производить изъ опытовъ аналогичныхъ опытамъ для опредѣленія μ , т. е. изъ опытовъ кинематическаго и динамическаго характера. Для твердыхъ тѣлъ λ опредѣляется довольно просто. Изъ соображеній теории упругости

$$\lambda = c^{-1} - \frac{2}{3} \mu,$$

гдѣ c коэффициентъ сжимаемости. Нужно замѣтить, что для твердыхъ тѣлъ размѣрность λ и μ иная:

$$[\lambda] = [\mu] = [L^{-1} MT^{-2}], \dots \dots \dots (213, a)$$

гдѣ μ —модуль сдвига. Такъ на примѣръ для стали

$$\mu = 0,819 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин.}}{\text{см.}^2}, \quad c^{-1} = 1,841 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин.}}{\text{см.}^2}.$$

*) См. Wiedemanns Annalen. 1877, стр. 387.

откуда

$$\lambda = 1,295 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин.}}{\text{см.}^2}.$$

Значений λ для жидкостей намъ не удалось найти *).

70. Коэффициентъ сжимаемости c представляется такъ:

$$c = \frac{1}{V} \frac{V - V'}{p' - p}, \dots \dots \dots (214)$$

гдѣ V и V' первоначальный и конечный объемы, p и p' первоначальное и конечное давление. Отсюда размѣрность c будетъ:

$$[c] = [LM^{-1}T^2] \dots \dots \dots (215)$$

Ниже приводимъ таблицу II, дающую значеніе коэффициента сжимаемости (по Квинке) для разныхъ жидкостей.

Таблица II.

	$c \cdot 10^7$		t'	Температ. коэффициентъ m .
	$t = 0.$	$t = t'.$		
Глицеринъ	252,4	251,0	19,0	—0,000292
Рѣнное масло	480,2	581,8	17,8	+0,01189
Миндальное масло	482,1	563,0	19,7	0,008519
Оливковое масло	485,9	617,4	18,3	0,01479
Вода	503,0	456,3	22,9	—0,004049
Сѣрнистый углеродъ	539,2	637,8	17,0	+0,01076
Скипидаръ	581,7	779,3	18,6	0,01830
Бензолъ	585,3	628,4	16,1	0,004581
Алкоголь	828,2	959,5	17,5	0,01113
Эфиръ	1155,7	1342,3	14,3	0,01127
"	—	1477,2	21,4	0,01302
Ртуть	39,2	—	—	—

*) См. С. Христиансенъ. Основы теоретической физики. СПб., 1895, I ч. На стр. 122 данъ выводъ и численное значеніе λ для воды, разсматриваемой какъ твердое тѣло. На основаніи этого вывода размѣрность λ не соответствуетъ размѣрности (213) для жидкихъ тѣлъ.

Температура измѣряется въ C° , давленіе въ атмосферахъ. Для пересчета въ абсолютныя единицы, а именно въ мегадины, достаточно приведенныя число подѣлить на 1,0137. Кромѣ того нужно замѣтить, что числа эти получены въ предѣлахъ 50—75 атмосферъ давленія. Вообще относительно коэффициента сжатія для жидкостей можно сказать слѣдующее:

Съ возрастаніемъ температуры сжимаемость жидкостей значительно возрастаетъ за исключеніемъ воды и глицерина, у которыхъ она убываетъ.

Наименьшая сжимаемость наблюдается у ртути, наибольшая—у эфира.

Сжимаемость зависитъ отъ тѣхъ предѣловъ давленій, въ которыхъ она наблюдается. Такъ напр. по Amagat для воды при $0^{\circ}C$ въ предѣлахъ 1—25 атм. коэффициентъ сжимаемости равенъ $52,5 \cdot 10^{-6}$, а въ предѣлахъ 2500—3000 атм.— $26,1 \cdot 10^{-6}$.

Tait для прѣсной воды даетъ такую эмпирическую формулу:

$$c \cdot 10^7 = (520 - 17p + p^2) - 10^{-2}(355 + p)t + 10^{-2}(3 + p)t^2, \dots (216)$$

гдѣ p давленіе въ тоннахъ на dm^2 . Для морской воды приближенно имъ дается:

$$c = \frac{0,00179}{38 + p} \left(1 - \frac{t}{150} + \frac{t^2}{10000} \right) \dots (217)$$

71. Переходимъ теперь къ коэффициенту внѣшняго трѣнія μ . Размѣрность его будетъ:

$$[\mu] = [L^{-2} MT^{-1}] \dots (218).$$

Нужно сказать, что вопросъ о внѣшнемъ треніи жидкостей до сихъ норъ не вполне ясно и точно рѣшенъ. Всѣ числа, добытыя въ этомъ направленіи, носятъ чисто спеціальныя характеръ, имѣющій значеніе для данной опытной постановки. Прежде чѣмъ разыскивать численныя значенія коэффициента μ приходилось рѣшать принципиальный вопросъ о томъ скользятъ ли жидкость вдоль разсматриваемаго твердаго тѣла или нѣтъ, и очень часто получались самые противорѣчивые результаты. Нѣкоторые авторы, какъ напр. Couette, утверждали, что скольженія, вообще, не существуетъ. Другіе же полагали, что жидкости, не смачивающія стѣнокъ, обязательно скользятъ. Не нужно забывать, что коэффициентъ μ не имѣетъ такого абсолютнаго значенія для разсматриваемой жидкости какъ коэффициентъ внутренняго тренія μ , такъ какъ онъ зависитъ отъ вещества твердой стѣнки относительно которой происходитъ скольженіе,—другими словами коэффициентъ внѣшняго тренія данной жидкости можетъ имѣть цѣлый рядъ значеній.

Вмѣсто коэффициента ν очень часто разсматриваютъ коэффициентъ ψ , введенный нами раньше, гдѣ

$$\psi = \frac{\mu}{\nu};$$

размѣрность его будетъ:

$$[\psi] = [L].$$

Изъ опытовъ Гельмгольца и Піотровскаго *) съ полымъ, вызолоченнымъ внутри, шаромъ, наполненнымъ испытуемой жидкостью получились такіе результаты:

Таблица III.

	ψ
Вода	0,23534
Алкоголь	0,01096
Эфиръ	0,01243
Сѣрнистый углеродъ .	0,04430

Приведенныя числа выражены въ абсолютной системѣ единицъ и вѣрны для скользянія вышеуказанныхъ жидкостей вдоль гладкой вызолоченной металлической стѣнки при средней комнатной температурѣ.

72. Мы видимъ, что размѣрность ψ есть линейная величина; легко дать геометрическое толкованіе этой величинѣ.

Пусть V будетъ относительная скорость жидкости относительно стѣнки въ какой-либо точкѣ ея. Примемъ эту точку за начало координатъ, направленіе скорости за ось X и направленіе нормали внутрь жидкости за ось Z . Сила съ которой стѣнка дѣйствуетъ на соприкасающуюся жидкость, рассчитанная на единицу поверхности будетъ

$$-\nu V.$$

Разсмотримъ очень тонкій слой жидкости, прилегающій къ стѣнкѣ. На элементарную площадку его ds со стороны стѣнки дѣйствуетъ сила

$$-\nu V ds,$$

*) См. Н. v. Helmholtz und G. v. Piotrowski. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Н. v. Helmholtz's Wissensch. Abh. I, стр. 172.

а со стороны жидкости на него дѣйствуетъ сила

$$Tds;$$

остальныя дѣйствующія силы будутъ пропорціональны объему, а потому ими можно пренебречь. Имѣя ввиду равномерное движеніе пишемъ:

$$(T - \nu V) ds = 0, \text{ т. е. } T = \nu V.$$

Такъ какъ вдоль стѣнки скорость не имѣетъ нормальной составляющей, то

$$T = \mu \frac{\partial V}{\partial z},$$

откуда

$$\nu V = \mu \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если черезъ v обозначимъ относительную скорость для какой либо точки жидкости весьма близкой къ стѣнкѣ, то

$$v = V + z \frac{\partial V}{\partial z},$$

или, на основаніи предыдущей зависимости:

$$v = V \left(1 + z \frac{\nu}{\mu} \right).$$

Изъ послѣдней зависимости мы заключаемъ, что въ точкѣ, у которой

$$z = - \frac{\mu}{\nu} = - \phi,$$

относительная скорость будетъ 0, т. е. предполагая стѣнку отодвинутой на величину ϕ вглубь самой стѣнки, можемъ сказать, что скольженія вдоль этой новой границы уже не будетъ.

Такимъ образомъ величина ϕ приобретаетъ вполне реальное значеніе.

Въ одной изъ новѣйшихъ работъ М. R. Détrait *) при изученіи скольженія жидкостей пользовался методомъ Пуазейля, т. е. истеченіемъ черезъ капиллярныя трубки, причемъ величина ϕ опредѣлялась методомъ сравненія. Изслѣдуя теченіе воды, керосина и алкоголя по капиллярнымъ трубкамъ изъ стекла и сѣры онъ нашелъ, что для воды, не смачивающей сѣры, ϕ равно почти одному микрону. Алкоголь и керосинъ смачивали какъ стекло такъ и сѣру и для нихъ оказалось $\phi = 0$.

*) См. М. R. Détrait. Recherches expérimentales sur le glissement des liquides a la paroi. Jour. de Physique 5-e série, t, III (Oktobre 1913).

Глава XIII.

Струйное и турбулентное движение жидкостей.

73. Положенія, развитія въ гл. II, показываютъ намъ, что въ основу представленія о характерѣ движенія жидкостей въ томъ видѣ, какъ мы это до сихъ поръ разсматривали, положено понятіе о *трубкѣ тока* и *струѣ*. Изъ этихъ понятій прямо вытекаетъ, что любой разсматриваемый нами потокъ жидкости можетъ быть заполненъ непрерывной системой каналовъ (безконечно малаго или конечнаго сѣченія), деформирующихся или недеформирующихся въ зависимости отъ того имѣемъ ли мы дѣло съ установившимся или неуставившимся движениемъ, стѣнки которыхъ могутъ считаться непроницаемыми для жидкости. Непроницаемость должна пониматься здѣсь въ томъ смыслѣ, что частицы жидкости, протекающія по какой либо струѣ (или трубкѣ тока), не могутъ проникнуть въ сосѣднія струи. Такое упорядоченное движение жидкости мы будемъ называть *струйнымъ движениемъ* ея.

Но опытъ показываетъ, что въ громадномъ большинствѣ, дѣйствительно наблюдаемыхъ на практикѣ движеній жидкости, явленія протекаютъ совершенно не такъ. Частицы жидкости пріобрѣтаютъ такія движенія, при которыхъ всякое представленіе о струѣ, въ точномъ смыслѣ этого слова, утрачивается; движение частицъ жидкости представляется безпорядочнымъ, т. е. скорость любой точки потока мѣняется весьма быстро безъ всякой видимой закономерности. Легкія частицы какого либо твердаго тѣла, плавающего въ жидкости, или краска, введенныя въ потокъ, сразу показываютъ, что при такомъ движеніи частицы жидкости перемѣшиваются, сталкиваются и какъ будто движутся въ совершенномъ безпорядкѣ.

Къ движенію только что описаннаго характера уже не примѣнимы всѣ, до сихъ поръ полученные, результаты; требуются особые методы изслѣдованія, дающіе возможность установить законы такого движенія и написать его дифференціальныя уравненія. Движеніе послѣдняго рода мы будемъ называть *турбулентнымъ*.

Въ дальнѣйшемъ постараемся кратко представить развитіе ученія о турбулентномъ движеніи жидкости въ связи съ струйнымъ движениемъ ея

74. То обстоятельство, что дѣйствительныя теченія жидкостей не подчиняются результатамъ, вытекающимъ изъ уравненій Навье, данныхъ для движенія вязкихъ жидкостей, было извѣстно и учтено уже многими авторами прошлаго столѣтія, какъ то: Беланже, Каріолисомъ,

Дюпюи и другими, работавшими надъ вопросомъ о движеніи воды въ рѣкахъ, каналахъ и трубахъ. Но эти авторы не стремились установить причины такихъ отклоненій отъ основныхъ законовъ движенія жидкостей, а просто удовлетворялись выводомъ ряда эмпирическихъ формулъ, дававшихъ въ среднемъ достаточно точные для практики результаты.

Первымъ пытавшимся рѣшить вопросъ точно, былъ французскій ученый Буссинекъ (Boussinesq), разработавшій этотъ вопросъ въ своемъ трудѣ: „Essai sur la théorie des eaux courantes“. Буссинекъ, желая подчинить анализу турбулентное движеніе, воспользовался понятіемъ о *средней мѣстной скорости* (vitesse moyenne locale), даннымъ еще раньше Сень-Венаномъ.

Дѣло въ томъ, что при турбулентномъ движеніи, какъ мы уже сказали, скорость въ данной точкѣ пространства непрерывно мѣняется такъ, что величина и направленіе истинной скорости v подвергаются весьма быстрымъ и частымъ колебаніямъ. Буссинекъ полагаетъ, что эти колебанія происходятъ вокругъ нѣкотораго средняго положенія за нѣкоторый періодъ времени. Обозначая этотъ періодъ черезъ T , среднюю величину скорости черезъ v_m и составляющія ея по осямъ черезъ u_m , v_m , w_m можемъ среднюю мѣстную скорость опредѣлить такими равенствами:

$$u_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u dt,$$

$$v_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v dt, \dots \dots \dots (219)$$

$$w_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} w dt.$$

Къ этимъ составляющимъ скорости Буссинекъ прилагаетъ всё тѣ же разсужденія, которыя были приложены къ прежнимъ величинамъ u , v , w и вводитъ ихъ въ основныя уравненія Навье. Но кромѣ того онъ добавляетъ еще двѣ гипотезы, которыми старается сдѣлать переходъ отъ струйнаго движенія къ турбулентному непрерывнымъ и вполне естественнымъ. Онъ допускаетъ, что коэффициенты внутренняго и внѣшняго тренія жидкости зависятъ не только отъ свойствъ жидкости и стѣнокъ съ которыми она приходитъ въ соприкосновеніе, но и координатъ точки относительно границъ. Эти два допущенія сдѣланы имъ на томъ основаніи, что источникомъ турбулентнаго движенія жидкости служатъ главнымъ образомъ стѣнки, благодаря неровностямъ которыхъ на нихъ возникаетъ беспорядочное движеніе и водовороты распространяющіеся внутрь жидкости.

Воспользовавшись этими допущеніями Буссинекъ въ указанномъ выше трудѣ даетъ рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ, связанныхъ съ движеніемъ воды въ каналахъ и трубахъ разнаго поперечнаго сѣченія; причемъ результаты, достигнутые имъ, могутъ считаться вполне удовлетворительными для практики.

75. Но все же рѣшеніе Буссинека не даетъ намъ отвѣта на основные вопросы: каковъ механизмъ турбулентнаго движенія? Можетъ ли жидкость при однихъ и тѣхъ же геометрическихъ условіяхъ двигаться струйнымъ и турбулентнымъ движеніемъ? Если можетъ, то каковы условія перехода одного рода движенія въ другой? Кроме того нужно замѣтить, что наличность струйнаго движенія не даетъ еще возможности утверждать, что для вязкой жидкости имѣетъ мѣсто движеніе, подчиняющееся гипотезѣ Ньютона о внутреннемъ треніи, т. е. имѣютъ мѣсто дифференціальныя уравненія Навье; мы можемъ лишь сказать, что допуская гипотезу Ньютона—возможно струйное движеніе. Такимъ образомъ является еще вопросъ: имѣютъ ли мѣсто, при наличности струйнаго движенія, законы внутренняго и внѣшняго тренія, которыми мы до сихъ поръ пользовались.

На послѣдній вопросъ мы можемъ дать положительный отвѣтъ. Исслѣдованіе Пуазейля (Poiseuille) *) надъ теченіемъ воды по капиллярнымъ трубкамъ ($d = 0,0293$ до $d = 0,65$ mm.) вполне подтвердили правильность зависимости (179, a) для расхода Q , данной въ § 57, другими словами подтвердили правильность основаній на которыхъ она была выведена—т. е. гипотезу Ньютона. Пользуясь опытными данными Пуазейля былъ опредѣленъ коэффициентъ внутренняго тренія воды съ температурной поправкой въ видѣ (212). Нужно замѣтить, что Пуазейль, исключительно на основаніи своихъ опытовъ, далъ законъ теченія воды по трубамъ въ видѣ:

$$Q = K \frac{(p_1 - p_0)}{l} d^4, \dots \dots \dots (220)$$

т. е. расходъ прямо пропорціоналенъ паденію давленія на единицу длины и четвертой степени діаметра, что вполне соответствуетъ формулѣ (179, a) при отсутствіи скольженія по стѣнкамъ, т. е. $\phi_2 = 0$. Теоретически формулы (179, a) впервые выведены Гагенбахомъ значительно позже.

76. Отвѣтомъ на всѣ остальные вопросы можетъ, до извѣстной степени, служить работа О. Рейнольдса (Osborne Reynolds) **).

*) См. Dr. Poiseuille. Sur le mouvement des liquides dans les tubes capillaires (Mem. prés. par div. sav. étr. a l'Academie des sc. t. LX; 1842, p. 438).

***) См. O. Reynolds. Papers on mechanical and physical subjects. II, p. 71.

О. Рейнольдс поставил себѣ задачей провѣрку закона Пуазейля для трубъ сравнительно большого діаметра, причемъ параллельно изучалъ характеръ течения въ испытуемой трубѣ. Для этого былъ взятъ большой ящикъ, изъ котораго вода поступала въ подвергавшіеся изслѣдованію, горизонтально поставленныя, стеклянныя трубы. У входа въ трубу устанавливалась пипетка, помощью которой въ текущую струю воды вводилась тонкая струйка окрашенной жидкости; эти струйки направлялись строго по оси трубы. Въ ящикѣ поддерживался постоянный напоръ, а скорость истечения регулировалась краномъ на концѣ трубы. Окрашенная струйка давала возможность сразу судить о характерѣ течения по трубѣ: пока струйка оставалась тонкой и прямолинейной можно было утверждать, что въ трубѣ имѣеть мѣсто правильное струйное движеніе; если же наблюдался размывъ окрашенной струйки, обуславливавшій окрашивание всего потока въ трубѣ, то это, очевидно, обозначало наступленіе турбулентнаго движенія, при которомъ частицы жидкости во всемъ потокѣ перемѣшивались.

О. Рейнольдс дѣлалъ двѣ серіи опытовъ: въ первой серіи вода въ питающемъ ящикѣ поддерживалась въ возможномъ покоѣ и вступала въ трубу по плавному раструбу, чѣмъ достигалось струйное движеніе въ началѣ трубы; во второй серіи искусственно создавалось турбулентное движеніе въ началѣ трубы торможениемъ при помощи дроссельклапана.

Первая серія опытовъ показала, что при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ, съ возрастаніемъ средней скорости движенія въ трубѣ наступалъ моментъ когда окрашенная струйка на нѣкоторомъ разстояніи отъ входа въ трубу разрывалась, завихрялась и окрашивала весь дальнѣйшій потокъ, т. е. струйное движеніе переходило въ турбулентное. Скорость v , при которой одинъ родъ движенія переходилъ въ другой О. Рейнольдс называлъ *критической скоростью*. Изъ соображеній о динамическомъ подобіи *) имъ выведено для v_k такое общее выраженіе:

$$v_k = R \frac{\mu}{\rho d}, \dots \dots \dots (221)$$

гдѣ μ коэффициентъ внутренняго тренія, ρ плотность, d діаметръ трубы, R коэффициентъ, зависящій отъ температуры. Для воды (въ предѣлахъ $5^\circ - 22^\circ$ С.) получилось изъ опытовъ:

$$v_k = \frac{1}{43,79 (1 + 0,0336t + 0,000221t^2)} d^{m/sc}, \dots \dots \dots (222)$$

*) См. В. Л. Кирпичевъ. Бесѣды о механикѣ. С.П.Б. 1907 г. ст. 134.

гдѣ d въ $mtr.$, t въ C^o . Для 12^oC эта формула приметъ видъ:

$$v_k = \frac{0,0159}{d} m/sc \dots \dots \dots (222,a)$$

Вторая серия опытовъ показала, что при очень малой средней скорости турбулентное движеніе, созданное въ началѣ трубы распространяется на нѣкоторомъ разстояніи отъ начала и затѣмъ переходитъ въ правильное струйное движеніе; съ возрастаніемъ же этой скорости наступалъ моментъ, когда турбулентное движеніе захватывало всю трубу.

Скорость, при которой происходитъ такого рода разрушеніе струйнаго движенія, можно назвать *нижней критической скоростью*; обозначимъ ее череръ v_{ku} . Для воды О. Рейнольдсъ нашелъ такое выраженіе для v_{ku} :

$$v_{ku} = \frac{1}{278 (1 + 0,0336t + 0,000221t^2) d} m/sc \dots \dots \dots (223)$$

Для 12^oC имѣемъ:

$$v_{ku} = \frac{0,00246}{d} \dots \dots \dots (223,a)$$

Всѣ опыты производились надъ трубами совершенно гладкими внутри причеъ матеріаль трубъ не вліялъ на результаты. Существеннымъ является состояніе стѣнокъ трубъ: напр. проволочная спираль, расположенная внутри трубы по ея стѣнкѣ, значительно понижала величины критическихъ скоростей.

Результаты полученные для воды Couette *) обобщилъ для любыхъ жидкостей въ видѣ:

$$v_k = \frac{1,29}{d} \frac{\mu}{\Delta}, \dots \dots \dots (224)$$

$$v_{ku} = \frac{0,204}{d} \frac{\mu}{\Delta}, \dots \dots \dots (225)$$

гдѣ d въ $mtr.$, $\frac{\mu}{\Delta}$ по таб. I.

77. Несмотря на то, что результаты, полученные О. Рейнольдсомъ, имѣютъ лишь частное значеніе для трубъ круговаго сѣченія, тѣмъ не менѣе они даютъ намъ отвѣты на вопросы поставленные въ началѣ § 75.

Существованіе критической скорости v_k показываетъ, что переходъ отъ струйнаго движенія къ турбулентному есть переходъ отъ

*) См. M. Couette. Etudes sur le frottement des liquides. Annales de chimie et de phys. 1890 г. XXI Т.

одного рода устойчиваго движенія къ другому, обусловленный какъ свойствами жидкости, такъ и расположеніемъ границъ ея.

Если скорость теченія менѣе нижней критической скорости v_{ku} , то струйное движеніе вполнѣ устойчиво, а турбулентное — неустойчиво. Если же скорость теченія больше критической скорости v_k , то наоборотъ. Интервалъ между нижней критической скоростью v_{ku} и критической скоростью v_k есть область неустойчивой формы движенія: при плавномъ втекании жидкости въ трубу въ этой области будетъ струйное теченіе, въ противномъ случаѣ движеніе становится турбулентнымъ.

Пользуясь пьезометрами, поставленными въ извѣстныхъ точкахъ испытуемой трубы, О. Рейнольдсъ убѣдился, что пока имѣло мѣсто струйное движеніе (окрашенная струя не размывалась) потеря давленія вполнѣ подчинялась формулѣ Пуазейля (220), при наступленіи же турбулентнаго движенія потеря давленія становилась больше.

Замѣтимъ, что кромѣ этой работы О. Рейнольдса есть еще изслѣдованіе Л. Норфа *) надъ теченіемъ воды въ открытомъ лоткѣ прямоугольнаго сѣченія постоянной ширины. Результаты достигнутые имъ вполнѣ совпадаютъ съ результатами О. Рейнольдса. Приведенныя выше, экспериментально открытыя, формы движенія жидкости и обстоятельства перехода одного рода движенія въ другой подвергались также теоретической обработкѣ со стороны многихъ авторовъ.

Самъ О. Рейнольдсъ, исходя изъ соображеній объ энергіи движенія, пытался дать теоретическое толкованіе своимъ результатамъ, но эту попытку нельзя признать удачной. Н. Lorenz, лордъ Kelvin, Rayleigh, Sommerfeld, Karaman, Noeter, R. v. Mises, Blumenthal продолжали эти теоретическія изысканія придя къ весьма сложнымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ довольно ненадежнымъ результатамъ.

Для насъ до сихъ поръ трудъ О. Рейнольдса остается единственной классической работой, указывающей на существованіе двухъ режимовъ въ теченіи жидкости: одинъ, подчиняющійся уравненіямъ Навье, можно назвать *гидродинамическимъ*, другой, — который назовемъ *гидравлическимъ*, подчиняется законамъ, установленнымъ чисто экспериментальнымъ путемъ. Переходъ отъ одного режима къ другому управляется критической скоростью:

$$v_k = R \frac{\mu}{\rho l},$$

гоѣ l какаѣ либо линейная величина, характеризующая границы; напр. для трубъ l есть діаметръ, для прямоугольнаго лотка — глубина потока и т. п.

*) См. L. Hopf. Turbulenz bei einem Flusse. Annalen der Physik, 1910 г. № 9, стр. 777.

78. Особое значеніе приведенные выше результаты имѣютъ для прикладной части гидромеханики т. е. для гидравлики. Въ основу ея кладется уравненіе Бернулли (32) § 11. Но это уравненіе не учитываетъ вредныхъ потерь на пути потока и практически нуждается поэтому въ поправкахъ на вязкость жидкости, шероховатость стѣнокъ и разныя мѣстныя сопротивленія (внезапныя измѣненія сѣченій, колѣна и т. п.).

Для вязкой несжимаемой жидкости для случая неустановившагося движенія мы имѣли уравненіе (32, b) § 42, которое представимъ въ видѣ:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} - U_1' = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} - U_2' - \frac{\mu}{\Delta} \int_1^2 (\Delta^2 u dx + \Delta^2 v dy + \Delta^2 w dz) + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds,$$

гдѣ $U' = \frac{U}{g}$. 1 и 2 обозначаютъ начальную и конечную точки линій тока между которыми разсматривается теченіе жидкости.

Для установившагося теченія послѣднее уравненіе можемъ переписать такъ:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} - U_1' = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} - U_2' + H_r \dots \dots (226)$$

гдѣ

$$H_r = - \frac{\mu}{\Delta} \int_1^2 (\Delta^2 u dx + \Delta^2 v dy + \Delta^2 w dz) \dots \dots (227).$$

H_r есть потерянный напоръ на протяженіи 1—2. Эта потеря обусловлена вредными сопротивленіями на пути (въ данномъ случаѣ вязкостью жидкости) въ предположеніи струйнаго теченія.

Для простѣйшаго случая,—горизонтальной цилиндрической трубы и дѣйствія одной лишь силы тяжести, имѣемъ:

$$v_1 = v_2, \quad U_1' = U_2' = z_1 = z_2.$$

Откуда (226) приметъ видъ:

$$\frac{p_1 - p_2}{\Delta} = H_r, \dots \dots \dots (228)$$

т. е. избытокъ начального надъ конечнымъ давленіемъ идетъ на преодоленіе вредныхъ сопротивленій.

Для струйного движенія H_r легко опредѣляется на основаніи зависимости (162) и (174, a) § 57. Предполагая ось трубы горизонтальной, имѣемъ:

$$H_u' = \frac{p_1 - p_2}{\Delta} = H_r;$$

считая $\psi_2 = 0$:

$$Q = \frac{\pi \Delta H_u'}{8\mu l} r_2^4.$$

Отсюда легко найдемъ:

$$H_r = K \frac{v_m l}{S}, \dots \dots \dots (229)$$

гдѣ $v_m = \frac{Q}{\pi r_2^2}$ средняя скорость течения, S площадь поперечнаго сѣченія трубы, K — коэффициентъ пропорціональности, гдѣ

$$K = \frac{8\mu\pi}{\Delta} \dots \dots \dots (230)$$

Мы видимъ, что потерянный напоръ для случая струйного движенія прямо-пропорціоналенъ первой степени средней скорости и длинѣ трубы и обратно-пропорціоналенъ площади поперечнаго сѣченія ея.

79. На практикѣ мы исключительно имѣемъ дѣло съ турбулентнымъ движеніемъ, для котораго, какъ указано выше, даже для цилиндрическихъ трубъ нѣтъ теоретическихъ данныхъ о потерянномъ напорѣ; эмпирически же выведенъ цѣлый рядъ формулъ для трубъ и каналовъ, имѣющихъ такой общій видъ:

$$H_r = K \frac{L\varphi(v)}{R}, \dots \dots \dots (231)$$

гдѣ v — средняя скорость течения, L — длина трубы, R — гидравлическій радіусъ сѣченія, т. е. отношеніе площади поперечнаго сѣченія къ смоченному периметру, K — коэффициентъ зависящій отъ разныхъ величинъ, какъ то: діаметра или гидравлическаго радіуса, средней скорости и т. п. Для $\varphi(v)$ большинство авторовъ принимаетъ

$$\varphi(v) = v^2,$$

такъ что формулы отличаются видомъ коэффициента K .

Въ послѣднее время Biel *) вывелъ выраженіе для K , имѣющее видъ

$$K = a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{v\sqrt{R}} \frac{\mu}{\Delta}, \dots \dots \dots (232)$$

*) R. Biel. Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteil. über Forschungsarb. Heft 44.

дающее хорошіе результаты не только для жидкостей, но и для газовъ. Въ этой формулѣ R берется въ $mtr.$, L въ $kmtr.$, v —въ $mtr./sc.$, $\frac{\mu}{\Delta}$ въ абсолютной системѣ единицъ (табл. I); H_r получается въ $mtr.$ водяного столба. Коэффициентъ a имѣетъ постоянное значеніе; $a = 0,12$. f называется коэффициентомъ шереховатости, b —коэффициентомъ вязкости. Значеніе этихъ коэффициентовъ зависитъ отъ состоянія и свойствъ стѣнокъ трубъ или каналовъ.

Изъ числа всѣхъ, до сихъ поръ предложенныхъ формулъ для потеряннаго напора, формула Биля единственная учитываетъ вязкость жидкости. Биль считаетъ, что и при турбулентномъ движеніи вязкость, въ томъ видѣ какъ ее разсматривали Навье и Стоксъ, играетъ нѣкоторую роль, вопреки существовавшему до сихъ поръ предположенію, что вязкость проявляется лишь въ струйномъ движеніи, при турбулентномъ же движеніи все теченіе управляется съ одной стороны величиной скоростей, а съ другой геометрическими свойствами стѣнокъ, ограничивающихъ потокъ.

80. Все изложенное до сихъ поръ приводитъ къ заключенію, что на практикѣ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ турбулентнымъ движеніемъ жидкостей, приходится при изслѣдованіяхъ какихъ либо вопросовъ сложнаго характера разсматривать каждый случай въ отдѣльности и устанавливать для него соотвѣтствующіе формулы и коэффициенты.

Нами выбранъ для изслѣдованія дисковой насосъ Тесла (N. Tesla), представляющій интересъ какъ съ теоретической такъ и съ практической стороны. Простота устройства его даетъ возможность написать, хотя и приближенно, уравненія движенія воды въ насосѣ и приближенно проинтегрировать ихъ, что до сихъ поръ не удавалось для другихъ гидравлическихъ машинъ съ вращательнымъ движеніемъ. Экспериментальная повѣрка даетъ возможность установить правильность теоретическихъ соображеній. Вторая часть нашей работы посвящена этому изслѣдованію.

Часть II.

ДИСКОВЫЯ МАШИНЫ.

ДИСКОВЫЯ МАШИНЫ.

Глава I.

Дисковыя машины Н. Тесла. Ихъ конструктивное осуществленіе. Общія соображенія.

1. Американскій физикъ Н. Тесла (Dr. Nikola Tesla) въ докладѣ, сдѣланномъ въ маѣ 1911 г. National Electric Light Association въ Нью-Йоркѣ, предложилъ новый, по его словамъ, принципъ утилизаціи энергіи движущихся жидкостей, паровъ и газовъ, основанный на использованіи силъ возникающихъ при движеніи ихъ вдоль подвижныхъ поверхностей, являющихся въ данномъ случаѣ рабочими органами, отбирающими располагаемую энергію *).

Другими словами рѣчь идетъ объ использованіи, въ обычномъ смыслѣ понимаемыхъ, вредныхъ сопротивленій, проявляемыхъ жидкостями и газами при ихъ теченіи, причемъ сопротивленія возникаютъ либо вслѣдствіе вязкости въ точномъ смыслѣ этого слова, либо вслѣдствіе турбулентнаго движенія. Такимъ образомъ мы имѣемъ дѣло съ новымъ типомъ фрикціонныхъ машинъ, дѣйствующихъ треніемъ жидкостей и газовъ о твердыя тѣла; интереснымъ является здѣсь то обстоятельство, что факторъ, отъ котораго мы до сихъ поръ во всѣхъ случаяхъ движенія жидкостей старались избавиться, является въ данномъ случаѣ полезнымъ, движущимъ усиліемъ.

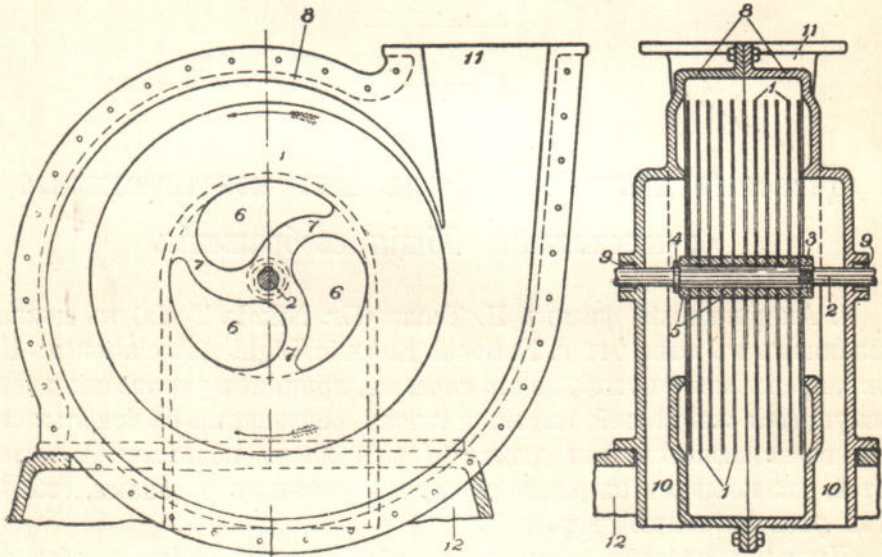
Здѣсь умѣстно будетъ напомнить, что принципъ этотъ не новъ, и что въ 1901 году профессоръ Н. Е. Жуковскій впервые облекъ его въ техническую форму въ видѣ шнурового насоса, о которомъ говорилось въ первой части нашей работы.

*) См. „Electrical Review and Western Electrician“, vol. 58, № 20 и vol. 59, №№ 11 и 14. Chicago 1911 г.

„Engineering News“, vol. 66, № 15, 1911 г.

„Scientific American“, vol. 105, № 14, New York, 1911 г.

2. Конструктивныя схемы, которыя придашь этому принципу Н. Тесла, являются болѣе современными и представлены на черт. 1 и 2. Какъ видно изъ чертежей Н. Тесла избралъ за рабочіе органы простыя диски, вращающіеся вокругъ общей оси и дѣйствующіе силами тренія, возникающими между рабочимъ веществомъ и дисками вслѣдствіе ихъ относительнаго движенія. Черт. 1 представляетъ дисковой центробѣжный насосъ и въ такомъ случаѣ вращеніе его должно происходить по верхней стрѣлкѣ. Конструкція его весьма проста. Колесо (1) состоитъ изъ ряда дисковъ, насаженныхъ на валѣ (2) и укрѣплен-



Черт. 1.

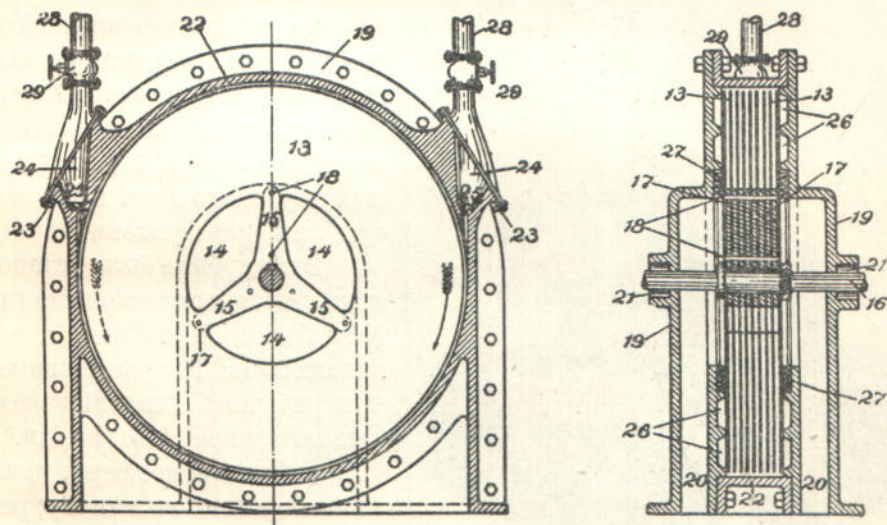
ныхъ на немъ помощью затяжной гайки (3), обварка (4) и промежуточныхъ шайбъ (5), устанавливающихъ рабочее разстояніе между дисками. Отверстія (6) въ дискахъ служатъ для поступленія всасываемой жидкости въ пространство между ними и образуютъ вмѣстѣ съ тѣмъ ручки (7) дисковъ.

Колесо работаетъ въ разрѣзномъ кожухѣ (8), ничѣмъ не отличающемся отъ гладкихъ, спиральныхъ диффузоровъ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосовъ, съ сальниковыми уплотненіями вала (9), двустороннимъ всасываніемъ (10) жидкости, и коническимъ нагнетательнымъ штуцеромъ (11). Весь насосъ монтированъ на рамѣ (12).

Процессъ работы такого насоса, на основаніи всего вышесказаннаго, вполне ясенъ: жидкость, находящаяся между дисками, благодаря тренію объ нихъ приходитъ во вращательное движеніе и подѣйствіемъ развивающейся силы инерціи, въ данномъ случаѣ центробѣжной силы, описываетъ относительно дисковъ спиральную траекторію, попадаетъ въ диффузоръ, затѣмъ въ нагнетательную трубу и преодолеваетъ требуемый напоръ. Если бы рабочее вещество, въ дан-

номъ случаѣ вода, поступала подъ давленіемъ въ штуцеръ (11) и, отработавъ, уходила въ пространство (10), мы имѣли бы случай обращенія насоса, т. е. водяную турбину, причемъ вращеніе происходило бы по нижней стрѣлкѣ. Пуская вмѣсто воды паръ или газъ, получимъ паровую или газовую турбину.

3. Конструктивная схема специально паровой или газовой турбины представлена на черт. 2. Рабочимъ органомъ и здѣсь является дисковое колесо (13); но ввиду большого числа оборотовъ, въ промежуткахъ между дисками, для жесткости, вставлены трехконечныя прокладки (17), стянутыя со спицами дисковъ (15) болтами (18) въ одну сплош-



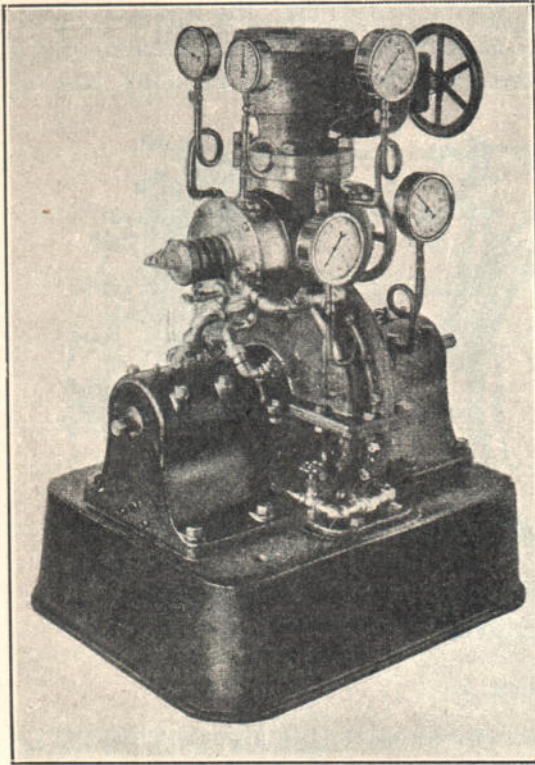
Черт. 2.

ную трехконечную втулку, насаженную на валъ (16). Пространства (14), образованныя соответствующими вырѣзами въ дискахъ, служатъ для отвода отработаннаго пара или газа.

Кожухъ турбины состоитъ изъ двухъ боковыхъ симметричныхъ крышекъ (19) съ обводными каналами (20) для отработаннаго пара или газа, сальниковыми коробками (21) для уплотненія вала, и средней кольцевой камеры (22) съ подводными паръ или газъ натрубками (23). Въ этихъ натрубкахъ устроены коническіе сходящіеся каналы (24), переходящіе въ узкія сопла (25), непосредственно подводящія рабочее вещество въ почти тангенціальномъ направленіи къ периферіи колеса. Для лучшей изоляціи подводящаго отъ отводящаго паръ пространство въ боковыхъ крышкахъ (19) устроены кольцевые каналы (26) и лабиринтныя уплотненія (27). Особенностью турбинъ этого рода является ихъ необычайно простая реверсивность, имѣющая особое значеніе въ судовомъ турбиностроеніи. Дѣйствительно, открывая вентиль на одной изъ паропроводныхъ трубъ (28) и прикрывая на другой, мы можемъ вращать турбинный валъ въ любую сторону.

Расширяющийся насадокъ (29) переходитъ въ суживающийся (24) для того, чтобы всю потенциальную энергію давленія пара обратить плавно, безъ потерь въ соплѣ (25), въ кинетическую энергію, заставляя его вступать съ возможно большей скоростью на колесо.

4. По принципу Н. Тесла была построена паровая турбина, общій видъ которой изображень на фиг. 3. Фиг. 4 представляетъ ту-же тур-



Фиг. 3.

бину со снятой верхней половиной кожуха и даетъ представление о видѣ рабочаго колеса, состоящаго изъ 25 стальныхъ дисковъ діаметромъ 18 дм. и толщиной каждый въ $\frac{1}{32}$ дм., насаженныхъ на валъ съ разстояніями около $2,8^m/m$. Вся турбина занимаетъ по площади пола (20×35) дм.² и въ высоту около 5 фт. Вѣсъ всей турбины 400 фунтовъ.

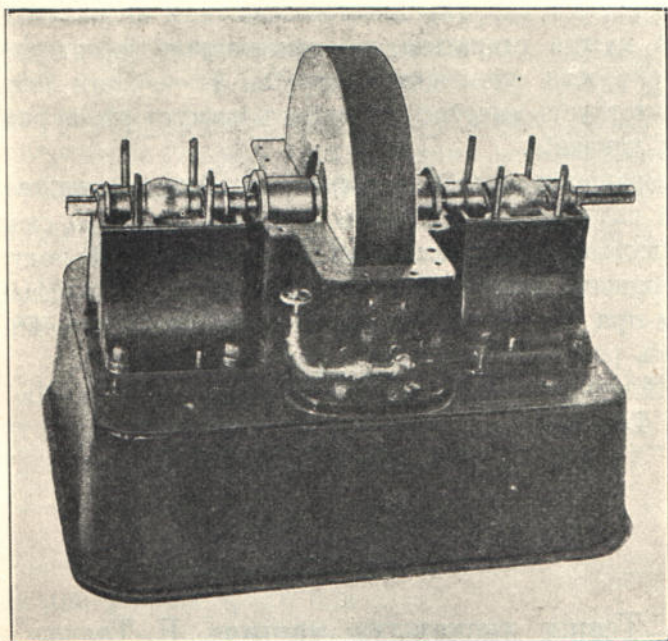
Эта турбина была установлена на электрической станціи New York Edison Comp. и развивала 200 Н. Р. эффективныхъ при рабочемъ давленіи насыщеннаго пара 125 фн./дм.² и выпускѣ въ атмосферу, давая 9000 оборотовъ въ минуту; расходъ пара при этомъ оказался 38 фнт. на лошадиную силу—часъ. При умѣренномъ перегрѣвѣ и конденсаціи расходъ пара можетъ быть доведенъ до 10—12 фнт. на лошадиную силу—

часъ. Какъ видимъ, условія соответствующія обыкновеннымъ паровымъ турбинамъ этой мощности.

Н. Тесла утверждаетъ, что при использованіи полного давленія котельной установки станціи, при вакуумѣ около 28—29,5 дм. и компаундированіи, можно мощность турбины довести до 600 Н. Р., увеличивъ втрое число дисковъ, на колесѣ, что въ общемъ незначительно отзовется на увеличеніи размѣровъ самой турбины.

Кромѣ этой турбины была испытана еще одна маленькая паровая турбина, построенная по типу черт. 1. Относительно ея особо подробныхъ свѣдѣній въ литературѣ не имѣется. Извѣстно только, что она развивала около 110 Н. Р. эффективныхъ, при работѣ въ атмосферу, и потребляла около 36 фунтовъ пара на лошадиную силу—часъ; кромѣ того указывается, что эта турбина могла бы развить большую

мощность, препятствіемъ чему являлся слабо сконструированный валъ. Обращаютъ на себя вниманіе малые размѣры турбины: рабочее колесо съ валомъ вѣситъ около 20 фнт., а кожухъ съ подшипниками не болѣе 30 фнт. такъ что на 1 фнт. вѣса машины приходится болѣе 2 Н. Р. полезныхъ. Эта же турбина работала очень хорошо какъ двигатель внутренняго сгоранія смѣсью паровъ нефти и воды.



Фиг. 4.

Изъ полученныхъ практическихъ результатовъ видно, что идея Н. Тесла въ своемъ осуществленіи дала прекрасные результаты. Если экономическія преимущества этого рода машинъ, благодаря недостатку въ опытномъ матеріалѣ, не совсѣмъ выяснены, то о конструктивныхъ преимуществахъ спорить не приходится; съ этой точки зрѣнія эти машины являются простѣйшими и наиболѣе удобными для реверсирования и регулированія.

Здѣсь уместно будетъ указать, что нѣмецкій физикъ В. Гэдэ (W. Gaede) одновременно съ Н. Тесла *) сообщилъ о новомъ воздушномъ насосѣ, построенномъ на томъ же принципѣ и давшемъ, еще до сихъ поръ не достигнутыя, степенни разрѣженія, выразившіяся числомъ $0,0000002 \text{ m./m.}$ ртутнаго столба.

*) Докладъ W. Gaede 83-му съезду естествоиспытателей въ Карлсруэ въ сентябрѣ 1911 г. Патентъ взятъ въ январѣ 1909 г.

См. также: „Physikalische Zeitschrift“, W. Gaede, Die äussere Reibung der Gaze und ein neues Prinzip für Luftpumpen: Die Molekularluftpumpe. № 18 (380), 1912 г.

5. Въ своемъ докладѣ, о которомъ сказано въ началѣ этой главы, Н. Тесла, приводитъ нѣкоторыя общія соображенія относительно основныхъ размѣровъ и производительности этихъ машинъ. Онъ указываетъ, что полезная работа насосовъ пропорціональна первой степени числа дисковъ и квадрату діаметра ихъ. Что касается разстоянія между дисками, то оно находится въ прямомъ отношеніи съ плотностью и вязкостью подаваемой жидкости и обратномъ отношеніи съ относительной скоростью скольженія этой жидкости по рабочимъ дискамъ. Кромѣ того нужно стараться, по возможности, достигнуть равенства выходной скорости жидкости и окружной скорости колеса и если этому препятствуетъ высокое давленіе въ диффузорѣ, то разбить насосъ на ступени давленія.

При обращеніи насоса въ двигатель оказывается, что полезный моментъ на валу пропорціоналенъ квадрату скорости скольженія рабочаго вещества по дискамъ. При 50% скольженія получается наибольшая мощность, наибольшій же коэффициентъ полезнаго дѣйствія достигается при значительно меньшей скорости скольженія и зависитъ отъ свойствъ рабочаго вещества и размѣровъ колеса.

Въ слѣдующей главѣ мы постараемся дать теорію дисковыхъ машинъ Н. Тесла.

Глава II.

Теорія дисковыхъ машинъ Н. Тесла.

6. Обращаясь къ построенію теоріи дисковой машины, приходится рѣшить основной вопросъ: по какому закону движется жидкость между рабочими дисками машины? т. е. подчиняется ли это движеніе законамъ чистой вязкости (струйнаго движенія) или имѣетъ мѣсто турбулентное движеніе.

Отвѣчая на эти вопросы, приходится указать, что, вообще говоря, можно ожидать и тотъ и другой родъ движеній—все зависитъ отъ разстояній между рабочими дисками и скорости относительнаго движенія жидкости по нимъ; такъ какъ и здѣсь, для случая движенія жидкости между параллельными стѣнками, должна существовать своя критическая скорость, аналогично существующей для трубъ (см. гл. XIII ч. I), ниже которой движеніе будетъ упорядоченное, струйное, т. е. подчиняющееся законамъ чистой вязкости, выше же наступаетъ турбулентное движеніе.

7. Имѣя ввиду практическое приложеніе предлагаемой теоріи, нужно замѣтить, что до настоящаго времени не существуетъ опытныхъ изслѣдованій, дающихъ критическія скорости движенія жидкости между параллельными плоскостями. Кромѣ того соображеніе чисто

аналитическаго характера, которое мы приводимъ ниже, не позволяеть намъ въ данномъ случаѣ использовать теорію движенія вязкой жидкости какъ таковую.

Дѣло въ томъ, что въ центробѣжныхъ насосахъ нормальная составляющая абсолютной скорости къ входной поверхности въ колесо, а въ турбинахъ — къ выходной поверхности, принимается по всей поверхности постоянной, а касательная составляющая — равной нулю. Имѣя это ввиду, и желая использовать струйную теорію движенія вязкой жидкости, мы должны были бы, въ нашемъ случаѣ, обратиться къ результатамъ §§ 59—66 ч. I, гдѣ собственно говоря и разобрана теоретическая схема дисковой машины. Въ этомъ случаѣ входныя и выходныя поверхности (въ ихъ практическомъ осуществленіи) будутъ цилиндрическими поверхностями нѣкотораго опредѣленнаго радіуса r_1 и r_2 . На основаніи вышесказаннаго $w_r \Big|_{r=r_1} = const.$, а отсюда, пользуясь уравненіемъ (185, a) ч. I, приходимъ къ заключенію, что функція $\phi(z)$ обращается въ постоянную C , т. е.

$$w_r r = C.$$

Значеніе этой постоянной опредѣлится изъ условій на границахъ (190, c). Эти условія показываютъ, что въ данномъ случаѣ

$$\gamma_1 C \Big|_{z=\pm h} = 0,$$

что возможно при условіи $\gamma_1 = 0$ или $C = 0$.

Первое условіе недопустимо, такъ какъ при $\gamma_1 = 0$ жидкость свободно скользитъ по дискамъ, т. е. нѣтъ взаимодѣйствій между дисками и жидкостью (см. § 35 ч. I), слѣдовательно машина не работаетъ. Второе же условіе приводитъ къ заключенію, что расходъ жидкости въ машинѣ равенъ нулю, такъ какъ $w_r = 0$, иными словами машина не подаетъ и не расходуетъ жидкости, т. е. жидкость находится въ простомъ вращательномъ движеніи, что для насъ не имѣетъ значенія.

Для примѣненія теоріи развитой въ §§ 59—66 ч. I нужно задаться закономъ распредѣленія радіальной составляющей w_r по входной или выходной поверхности, удовлетворяющимъ уравненію (199), изъ котораго опредѣляется функція Z , т. е. $\phi(z)$, но это съ одной стороны очень сложно, а съ другой — практически почти не осуществимо.

8. Такимъ образомъ намъ остается принять существованіе турбулентнаго движенія между дисками машины *). Допустимъ кромѣ того, что частица жидкости движется между дисками какъ одно цѣлое, т. е. движеніе плоское и происходитъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси вращенія; наконецъ отъ дѣйствія силы тяжести отка-

*) См. Н. Lorenz, Theorie und Berechnung der Tesla—Kreiselräder. Zeitschr. für das gesamte Turbinenwesen. №№ 6, 7. 1912 г.

жемся, какъ это обыкновенно дѣлается въ теоріи турбинъ и центробѣжныхъ насосовъ при разсмотрѣніи движенія жидкости черезъ рабочее колесо.

Принявъ эти допущенія можемъ написать дифференціальныя уравненія абсолютнаго движенія жидкости въ дисковой машинѣ. Эти уравненія легко получатся изъ уравненій (184) § 59 ч. I. Въ данномъ случаѣ (плоское движеніе) w_r , w_t и p не зависятъ отъ z и будутъ функціями одного лишь r , g должно быть принято равнымъ 0; кромѣ того проекціи силы отъ вязкости, на единицу массы, на оси r и t должны быть замѣнены силами R_1 и T_1 отъ турбулентнаго движенія. Такимъ образомъ получимъ:

$$w_r \frac{dw_r}{dr} - \frac{w_t^2}{r} = R_1 - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}, \dots \dots \dots (1)$$

$$w_r \frac{d(w_t r)}{dr} = T_1 r.$$

Остается найти выраженія для R_1 и T_1 . Для турбулентнаго движенія примемъ силу dF , дѣйствующую на элементъ жидкости, пропорціальной поверхности соприкосновенія этого элемента со стѣнками дисковъ и квадрату скорости v_0 относительнаго движенія жидкости по дискамъ.

Такъ какъ мы пользуемся цилиндрическими координатами, то для dF получимъ выраженіе:

$$dF = k_1 v_0^2 (2rd \varphi dr),$$

гдѣ k_1 коэффициентъ пропорціальности, множитель же 2 вошелъ потому, что каждый элементъ жидкости соприкасается съ двухъ сторонъ съ рабочими дисками. Масса элемента жидкости dm выразится такъ:

$$dm = \rho rd \varphi drs,$$

гдѣ s разстояніе между дисками. Отсюда сила на единицу массы жидкости будетъ:

$$F_1 = \frac{dF}{dm} = \frac{2k_1 v_0^2}{\rho s} \dots \dots \dots (2)$$

Направленіе этой силы совпадаетъ съ направлениемъ относительной скорости v_0 , поэтому:

$$R_1 = F_1 \cos(r, v_0), \quad T_1 = F_1 \cos(t, v_0). \dots \dots \dots (3)$$

Если ω угловая скорость вращенія дисковъ, то радіальная составляющая скорости v_0 будетъ w_r , а касательная составляющая ($w_t - \omega r$), отсюда

$$v_0^2 = w_r^2 + (w_t - \omega r)^2, \dots \dots \dots (4)$$

и

$$\cos(r, v_0) = \frac{w_r}{v_0}, \quad \cos(t, v_0) = \frac{w_t - \omega r}{v_0} \dots \dots \dots (5)$$

Поэтому, пользуясь (2), (3) и (5), находимъ:

$$R_1 = k_2 v_0 w_r, \quad T_1 = k_2 v_0 (w_t - \omega r), \quad \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ $k_2 = \frac{2k_1}{\rho s}$.

Уравненія движенія (1) примутъ такой видъ:

$$w_r \frac{dw_r}{dr} - \frac{w_t^2}{r} = k_2 v_0 w_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \dots \dots \dots (1, a)$$

$$w_r \frac{d(w_t r)}{dr} = k_2 v_0 (w_t - \omega r) r.$$

Условіе сплошности получится довольно просто. Обозначая объемный расходъ, въ единицу времени, дисковой машины черезъ Q , число дисковъ черезъ $(n_1 + 1)$, можемъ написать, что

$$Q = (2\pi r s n_1) w_r,$$

гдѣ выраженіе въ скобкахъ есть цилиндрическая поверхность радіуса r , черезъ которую протекаетъ жидкость съ нормальной къ ней скоростью w_r . Послѣднее равенство перепишемъ такъ:

$$w_r r = \frac{Q}{2\pi s n_1} = C, \quad \dots \dots \dots (7)$$

что и будетъ условіемъ сплошности въ нашемъ случаѣ.

9. Обращаясь къ интегрированію системы (1, a), рассмотримъ второе изъ этихъ уравненій. Помножая его на r , и пользуясь зависимостями (4) и (7), послѣ простыхъ преобразованій перепишемъ его такъ:

$$\frac{d(w_t r)}{dr} = a (w_t r - \omega r^2) \sqrt{(w_t r - \omega r^2)^2 + C^2}, \quad \dots \dots \dots (8)$$

гдѣ $a = \frac{4\pi n_1 k_1}{\rho Q}$.

Послѣднее уравненіе можно представить еще въ такой формѣ:

$$\frac{d(w_t r - \omega r^2)}{dr} = a (w_t r - \omega r^2) \sqrt{(w_t r - \omega r^2)^2 + C^2} - 2\omega r;$$

полагая $(w_t r - \omega r^2) = u$, находимъ:

$$\frac{du}{dr} = au \sqrt{u^2 + C^2} - 2\omega r, \dots \dots \dots (8,a)$$

уравненіе не поддающееся непосредственному интегрированію. Мы можемъ его нѣсколько упростить принимая во вниманіе, что въ разсматриваемыхъ случаяхъ движенія относительная тангенціальная скорость $w_t - \omega r$ должна быть значительно больше соотвѣтствующей радіальной скорости w_r , что подтверждается опытами Г. Кэмпфа (G. Kempf) надъ гребными винтами*). Эти опыты показываютъ, что относительныя траекторіи частицъ жидкости по лопастямъ винта въ областяхъ не близкихъ къ оси вращения наклонены къ радіусамъ подъ углами мало отличными отъ прямого. Такъ какъ въ дисковыхъ машинахъ активной частью является кольцевая поверхность съ достаточно большимъ внутреннимъ діаметромъ, то для частей этой поверхности, не находящихся въ непосредственной близости къ внутреннему краю, съ значительной степенью точности можно пренебречь членомъ C^2 по сравненію съ $(w_t r - \omega r^2)^2$; такъ напр. въ нашихъ опытахъ наибольшее значеніе C^2 равнялось 0,05. Принявъ это, приходимъ къ уравненію типа *Рикатти* слѣдующаго вида:

$$\frac{du}{dr} = a u^2 - 2\omega r, \dots \dots \dots (8,b)$$

которое подстановкой

$$u = \frac{(a\omega)^{1/3}}{a(3x)^{2/3}} \left(\frac{3x}{y} \frac{dy}{dx} + 1 \right), \dots \dots \dots (9)$$
$$r = - \frac{(3x)^{2/3}}{2(a\omega)^{1/3}},$$

преобразуется къ такому дифференціальному уравненію второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{(1/3)^2}{x^2} \right] y = 0, \dots \dots \dots (10)$$

что представляетъ собой каноническую форму Бесселева уравненія, полный интеграль котораго въ Бесселевыхъ функціяхъ J перваго рода, напишется такъ:

$$y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x), \dots \dots \dots (11)$$

гдѣ c_1 и c_2 произвольныя постоянныя.

*) См. G. Kempf, Neuere Anschauungen und Forschungen auf dem Gebiete der Schiffsschraube. Zeitschr. für das gesamt. Turbinenwesen. №№ 10, 11, 12, 1914 г.

Переходя отъ переменныхъ y и x помощью подстановки (9) обратно къ u и r и замѣчая, что $u = w_t r - \omega r^2$, послѣ простыхъ преобразованій, на основаніи фундаментальныхъ свойствъ Бесселевыхъ функций, получимъ:

$$w_t = \omega r - i \sqrt{\frac{2\omega}{ar} \left[J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{-2\omega a} r^{3/2} \right) + c' J_{4/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{-2\omega a} r^{3/2} \right) \right] \left[J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{-2\omega a} r^{3/2} \right) + c' J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{-2\omega a} r^{3/2} \right) \right]}, \quad (12)$$

гдѣ c' произвольная постоянная, опредѣляемая изъ условий на границахъ. Такъ, для насосовъ обыкновенно принимаютъ, что w_t обращается въ нуль на входной поверхности въ колесо, т. е. для $r = r_1$, а для турбинъ значеніе w_t на входной поверхности будетъ извѣстно.

10. Зависимость (12) есть полный интегралъ уравненія (8, b) и въ связи съ (7) даетъ рѣшеніе кинематической стороны вопроса. Дѣйствительно, обозначая дробь въ правой части (12) черезъ $-F(r)$, находимъ для w_t и w_r два уравненія вида:

$$w_t = \omega r + F(r), \quad w_r = \frac{C}{r} \dots \dots \dots (13)$$

Такъ какъ $w_t = r \frac{d\varphi}{dt}$ и $w_r = \frac{dr}{dt}$ (см. § 44, ч. I), то, подѣливъ

первое равенство на второе, найдемъ

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{C} [\omega r + F(r)],$$

откуда уравненіе абсолютной траекторіи частицы жидкости напишется такъ:

$$\varphi = \frac{\omega r^2}{2C} + \frac{1}{C} \int F(r) dr + C'', \dots \dots \dots (14)$$

гдѣ квадратура можетъ быть найдена съ любой степенью приближенія.

11. Для насъ представляютъ большой интересъ динамическія соотношенія, имѣющія мѣсто при движеніи жидкости черезъ колесо дисковой машины. Для вывода этихъ соотношеній составимъ балансъ энергіи для частицы жидкости въ предѣлахъ рабочаго колеса. Напишемъ работу внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ элементу жидкости на элементарномъ пути абсолютной траекторіи, рассчитанную на единицу массы.

Для этого изъ уравненія (1) опредѣляемъ составляющія R_1 и T_1 этихъ силъ по координатнымъ осямъ. Находимъ:

$$R_1 = w_r \frac{dw_r}{dr} - \frac{w_t^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \dots \dots \dots (1,b)$$
$$T_1 = \frac{w_r}{r} \frac{d(w_t r)}{dr};$$

составляющія по тѣмъ же осямъ элемента абсолютной траекторіи ds будутъ:

$$ds_r = dr, \quad ds_t = rd\varphi;$$

или, на основаніи выраженій для w_r и w_t , приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, эти составляющія переписутся такъ:

$$ds_r = dr, \quad ds_t = \frac{w_t}{w_r} dr = rd\varphi. \quad \dots \quad (15)$$

Помножая R_1 и T_1 соотвѣтственно на эти проекціи, послѣ простыхъ преобразованій получимъ:

$$R_1 dr + T_1 rd\varphi = w_r dw_r + w_t dw_t + \frac{dp}{\rho}. \quad \dots \quad (16)$$

Правую часть этого равенства мы можемъ такъ представить:

$$w_r dw_r + w_t dw_t + \frac{dp}{\rho} = gd \left(\frac{w_r^2 + w_t^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} \right) = gd \left(\frac{v_a^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} \right),$$

гдѣ v_a абсолютная скорость движенія частицы жидкости, а Δ удѣльный вѣсъ ея. Замѣчая, что выраженіе $\frac{v_a^2}{2g} + \frac{p}{\Delta}$ есть полная энергія частицы, рассчитанная на единицу вѣса, размѣрность которой есть длина, перепишемъ (16) въ видѣ:

$$R_1 dr + T_1 rd\varphi = gdH, \quad \dots \quad (17)$$

гдѣ H , полная энергія въ колесѣ, будетъ функціей отъ r .

Обозначая черезъ χ полярный уголъ относительной траекторіи частицы (относительно вращающагося диска), отсчитанный отъ своей подвижной полярной оси, можемъ написать, что

$$\varphi = \chi + \omega t + c, \quad \dots \quad (18)$$

или

$$d\varphi = d\chi + \omega dt; \quad \dots \quad (18,a)$$

подставивъ это выраженіе для $d\varphi$ въ (17), найдемъ:

$$(R_1 dr + T_1 rd\chi) + T_1 r\omega dt = gdH;$$

пользуясь выраженіемъ для T_1 изъ (1,b) и замѣчая, что $dt = \frac{dr}{w_r}$, перепишемъ послѣднее равенство такъ:

$$(R_1 dr + T_1 rd\chi) + \omega d(w_r r) = gdH.$$

Такъ какъ

$$dr = d\sigma cs(r, dt) \text{ и } r d\chi = d\sigma cs(t, d\sigma),$$

гдѣ $d\sigma$ элементъ относительной траекторіи, совпадающій по направлению съ относительной скоростью v_0 , то, на основаніи (3), имѣемъ:

$$R_1 dr + T_1 r d\chi = F_1 d\sigma,$$

поэтому послѣднее равенство перепишется такъ:

$$F_1 d\sigma + \omega d(w_t r) = gdH; \dots \dots \dots (19)$$

это уравненіе и представляетъ собой балансъ энергіи въ дифференціальной формѣ для дисковой машины.

12. Для болѣе подробнаго выясненія механическаго смысла послѣдняго уравненія, помножимъ второе уравненіе въ (1,b) на

$$2\pi n_1 s r^2 \rho dr,$$

послѣ чего оно приметъ слѣдующій видъ:

$$(2\pi r n_1 s w_r \rho) d(w_t r) = [T_1 (2\pi r n_1 s dr \rho)] r.$$

Множитель въ скобкахъ слѣва есть масса M жидкости, протекающей въ единицу времени черезъ рабочее колесо; справа въ прямыхъ скобкахъ стоитъ выраженіе касательной силы, приложенной къ массѣ элементарнаго кольца внутренняго радіуса r , ширины $n_1 s$ и толщины dr , слѣдовательно все выраженіе справа есть элементарный моментъ $d\mathfrak{M}$ силъ, приложенныхъ къ этому кольцу. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$Md(w_t r) = d\mathfrak{M}, \dots \dots \dots (20)$$

или

$$d(w_t r) = \frac{d\mathfrak{M}}{M} = d\mathfrak{M}_1,$$

гдѣ $d\mathfrak{M}_1$ -- элементарный моментъ, рассчитанный на единицу массы, протекающей въ единицу времени. Такимъ образомъ уравненіе (19) перепишется въ видѣ:

$$F_1 d\sigma + \omega d\mathfrak{M}_1 = gdH. \dots \dots \dots (19,a)$$

Первое слагаемое слѣва представляетъ работу силы на единицу массы, приложенной къ частицѣ жидкости, на элементѣ относительной траекторіи. Это есть работа противъ вредныхъ сопротивленій въ колесѣ дисковой машины, представляющая собой затрату энергіи на турбулентное движеніе; причеъ нужно замѣтить, что другихъ вредныхъ сопротивленій, въ данномъ случаѣ, въ колесѣ не будетъ.

Второе слагаемое въ лѣвой части есть элементарная работа на единицу массы, извнѣ приводимая къ валу—въ случаѣ машины орудія (насоса), или получаемая съ вала—въ случаѣ машины двигателя (турбины).

Въ правой части стоитъ полная энергія на единицу массы, получаемая въ первомъ случаѣ и располагаемая во второмъ.

Въ томъ и другомъ случаѣ работа на валу по знаку противоположна работѣ $F_1 dz$. Кромѣ того, если элементарный моментъ $d\mathfrak{M}$, приложенный извнѣ считать для насоса положительнымъ, то для двигателя онъ будетъ отрицательнъ, такъ какъ двигатель есть обращеніе насоса.

Поэтому помножая уравненіе (19,а) на M —массу жидкости, протекающую въ единицу времени черезъ колесо, получимъ:

$$\mp dL_r \pm \omega d\mathfrak{M} = \Delta Q dH;$$

интегрируя въ предѣлахъ колеса, найдемъ для насоса

$$\omega \mathfrak{M}_p = \Delta Q H_p + L_{rp},$$

гдѣ $\Delta Q = Mg$; или, на основаніи (20):

$$\frac{\Delta Q}{g} \omega \left\{ (w_t r)_2 - (w_t r)_1 \right\}_p = \Delta Q H_p + L_{rp}; \dots \dots \dots (21)$$

для двигателя аналогично получимъ:

$$\frac{\Delta Q}{g} \omega \left\{ (w_t r)_1 - (w_t r)_2 \right\}_m = \Delta Q H_m - L_{rm}. \dots \dots \dots (22)$$

Отсюда гидравлическіе коэффиціенты полезнаго дѣйствія τ_{hp} и τ_{hm} дискового насоса и двигателя напишутся такъ:

$$\tau_{hp} = \frac{g H_p}{\omega \left\{ (w_t r)_2 - (w_t r)_1 \right\}_p}, \dots \dots \dots (23)$$

$$\tau_{hm} = \frac{\omega \left\{ (w_t r)_1 - (w_t r)_2 \right\}_m}{g H_m}.$$

Нужно замѣтить, что здѣсь гидравлическіе коэффиціенты полезнаго дѣйствія относятся только къ потерямъ энергіи въ колесѣ, такъ какъ $H(r)$ есть энергія созданная или потраченная въ одномъ лишь колесѣ. Поэтому потери энергіи въ направляющихъ кожухахъ или лопаткахъ и другихъ мѣстахъ внѣ колеса этими коэффиціентами не учитываются.

13. Два послѣднихъ выраженія (21) и (22) ничѣмъ не отличаются отъ основныхъ уравненій Эйлера для турбинъ и центробѣжныхъ насосовъ, работающих лопатками.

Присоединяя сюда уравненія (7) и (12), мы могли бы рѣшать любой вопросъ относительно дисковой машины, если бы сложность уравненія (12) не являлась значительной помѣхой. Можно, конечно, пользуясь рядами для Бесселевыхъ функций, правую часть въ (12) представить въ видѣ ряда, но, остановившись даже на второмъ членѣ разложения, мы получили бы очень сложную зависимость между ω и Q . Для практическихъ примѣненій гораздо удобнѣе приемъ, предложенный Г. Лоренцомъ, который мы здѣсь и изложимъ.

Для этого вернемся къ уравненію (19):

$$F_1 d\sigma + \omega d(w_t r) = gdH, \dots \dots \dots (19)$$

въ которомъ элементъ относительной траекторіи $d\sigma$ можетъ быть такъ представленъ:

$$d\sigma = v_0 dt,$$

или, такъ какъ $w_r = \frac{dr}{dt}$

$$d\sigma = \frac{v_0 dr}{w_r} \dots \dots \dots (24)$$

Кромѣ того, на основаніи (2) и (4), приближенно можемъ написать

$$F_1 = \frac{2k_1}{\rho s} (w_t - \omega r)^2, \dots \dots \dots (25)$$

что соотвѣтствуетъ отбрасыванію въ выраженіи для v_0^2 члена w_r^2 . Мы это дѣлаемъ на основаніи тѣхъ же соображеній, по которымъ въ уравненіи (8, a) пренебрегли членомъ C^2 . Другими словами мы полагаемъ

$$v_0 = w_t - \omega r. \dots \dots \dots (26)$$

Подставляя (24), (25) и (26) въ (19), и пользуясь основнымъ уравненіемъ сплошности (7), имѣемъ:

$$a (w_t - \omega r)^3 r dr + \omega d(w_r r) = gdH; \dots \dots \dots (27)$$

отбрасывая въ уравненіи (8) C найдемъ, что

$$d(w_r r) = a (w_r - \omega r)^2 dr, \dots \dots \dots (28)$$

на основаніи чего (27) приметъ видъ:

$$a (w_t - \omega r)^2 w_t r dr = gdH \dots \dots \dots (29)$$

Помножая это уравнение на r^2 , на основаніи (28) перепишемъ его такъ:

$$(w_t r) d (w_t r) = g r^2 H. \dots \dots \dots (30)$$

Интегрируя въ предѣлахъ колеса, находимъ:

$$(w_t r)^2 - (w_t r)_1^2 = 2g \int_{r_1}^r r^2 dH; \dots \dots \dots (31)$$

съ другой стороны, уравнение (29) помноженное на r^2 , представится въ видѣ:

$$a (w_t r - \omega r^2)^2 w_t r = g r^2 \frac{dH}{dr} \dots \dots \dots (32)$$

14. Уравненія (31) и (32) весьма просты и удобны для подсчетовъ, но въ нихъ является неизвѣстной функція $H(r)$ —энергія пріобрѣтаемая или отдаваемая въ колесѣ (на единицу вѣса).

Для функціи $H(r)$ можно вывести приближенное выраженіе, примѣнительно къ дисковымъ насосамъ, исходя изъ слѣдующихъ соображеній. Разлагая $H(r)$ въ рядъ, напишемъ:

$$H(r) = H(r_1) + (r - r_1) H'(r_1) + \frac{(r - r_1)^2}{2} H''(r_1) + \dots \dots$$

Замѣчая, что r_1 есть радіусъ цилиндрической поверхности, на которой рабочая жидкость вступаетъ въ колесо, а r_2 —на которой оставляетъ его, можемъ утверждать, что для всѣхъ дисковыхъ машинъ

$$H(r_1) = 0 \dots \dots \dots (A).$$

Кромѣ того, въ насосахъ жидкость вступаетъ въ колесо въ радіальномъ направленіи, т. е.

$$(w_t r)_1 = 0,$$

поэтому изъ (32)

$$H'(r_1) = 0; \dots \dots \dots (B)$$

обозначая полный напоръ въ колесѣ черезъ H_k , т. е.

$$H_k = H(r_2), \dots \dots \dots (33)$$

и останавливаясь въ разложеніи на третьемъ членѣ, получимъ для функціи $H(r)$ выраженіе:

$$H(r) = H_k \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \dots \dots \dots (34)$$

Подставляя въ уравненія (31) и (32), найдемъ окончательно:

$$(w_t r)^2 - (w_t r)_1^2 = \frac{4gH_k}{(r_2 - r_1)^2} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12} \right), \dots \dots \dots (35)$$

$$a (w_t r - \omega r^2)^2 w_t r = \frac{2gH_k}{(r_2 - r_1)^2} r^2 (r - r_1).$$

Эти уравненія и (34) имѣютъ мѣсто для дисковыхъ насосовъ. Лоренцъ пользуется функціей $H(r)$ въ видѣ (34) и для турбинъ, что не согласуется съ сдѣланными имъ заключеніями, приведенными ниже. Принимая ихъ, какъ намъ кажется, нужно итти слѣдующимъ путемъ.

Считаясь съ тѣмъ, что въ турбинѣ жидкость движетъ колесо, должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$w_t \geq \omega r,$$

такъ какъ относительная скорость въ тангенціальномъ направленіи во всякомъ случаѣ совпадаетъ съ направлениемъ вращенія; при скольженіи жидкости относительно дисковъ абсолютная скорость больше переносной и въ предѣльномъ случаѣ (отсутствіе скольженія) наступаетъ равенство ихъ. Если бы оказалось, что на части диска относительная скорость по касательной отрицательна, т. е.

$$w_t < \omega r,$$

то на этомъ участкѣ колеса жидкость тормозила бы вращеніе и его пришлось бы отбросить.

Такимъ образомъ, для лучшаго использования энергіи жидкости, мы должны допустить, что на *выходной* поверхности, для $r = r_2$, абсолютная и переносная тангенціальныя скорости равны, т. е.

$$(w_t - \omega r)_{r=r_2} = 0, \text{ или } (w_t)_2 = \omega r_2. \dots \dots \dots (36)$$

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ абсолютная скорость, съ которой жидкость покидаетъ колесо будетъ наименьшей. Имѣемъ:

$$(v_a)_2^2 = (w_t)_2^2 + \left(\frac{Q}{2\pi r_2 s n_1} \right)^2,$$

откуда, на основаніи вышеприведенныхъ неравенствъ, наименьшая величина для $(v_a)_2$ будетъ:

$$\min. (v_a)_2^2 = (\omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{2\pi r_2 s n_1} \right)^2,$$

а слѣдовательно и уносимая изъ колеса энергія будетъ minimum. Замѣтимъ, что при этихъ условіяхъ *относительная траекторія частицы жидкости на выходной поверхности будетъ направлена радиально.*

Положеніемъ (36) для *выходной* поверхности пользуется и Лоренцъ. На основаніи (36) и (32) находимъ:

$$H'(r_2) = 0; \dots \dots \dots (B')$$

присоединяя сюда условіе

$$H(r_1) = 0, \dots \dots \dots (A')$$

найдемъ видъ функціи $H(r)$ для дисковой турбины.

Для этого воспользуемся разложеніемъ:

$$H(r) = H(r_2) + (r - r_2) H'(r_2) + \frac{(r - r_2)^2}{2} H''(r_2) + \dots ;$$

полагая въ немъ $r = r_1$, на основаніи (A'), (B') и (33) получимъ (останавливаясь на третьемъ членѣ);

$$H''(r_2) = - \frac{2H_k}{(r_1 - r_2)^2},$$

откуда, послѣ передѣлокъ:

$$H(r) = \frac{H_k}{(r_1 - r_2)^2} (r + r_1 - 2r_2) (r_1 - r) \dots \dots \dots (37)$$

Уравненія (31) и (32) переписутся такъ:

$$(w_t r)^2 - (w_t r)_1^2 = \frac{4g H_k}{(r_1 - r_2)^2} \left\{ \frac{r_2 (r^3 - r_1^3)}{3} - \frac{(r^4 - r_1^4)}{4} \right\}, \dots \dots (35,a)$$

$$a (w_t r - \omega r^2)^2 w_t r = \frac{2g H_k}{(r_1 - r_2)^2} r^2 (r_2 - r).$$

Мы видимъ, что какъ для функціи $H(r)$, такъ и для основныхъ уравненій дисковыхъ турбинъ, получаются другія выраженія по сравненію съ уравненіями (35).

Замѣтимъ здѣсь, что всюду въ предшествовавшихъ выводахъ черезъ r_1 обозначался радіусъ внутренней поверхности колеса, по которой жидкость въ него вступаетъ, а черезъ r_2 — радіусъ внѣшней выходной поверхности изъ него, причеиъ $r_2 > r_1$ и уравненія (35, a) написаны для турбины съ внутреннимъ подводомъ воды (подобной турбины Фурнейрона). Замѣняя въ (37) и (35, a) r_1 на r_2 и наоборотъ получили бы уравненія для турбинъ съ внѣшнимъ подводомъ воды (подобно турбинѣ Фрэнсиса).

Г. Лоренцъ оставляетъ и для турбинъ функцію $H(r)$ въ прежнемъ видѣ, принимая условіе (36) на *выходной* поверхности т. е. полагаетъ

$$H(r) = H_k \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2, \dots \dots \dots (34)$$

гдѣ r_2 считается входнымъ, а r_1 выходнымъ радіусомъ.

Принимая для $H(r)$ выражение (34), и считая r_1 *выходнымъ* радиусомъ, мы можемъ, конечно, положить

$$(w_t)_1 = \omega r_1,$$

но не имѣемъ права считать на выходной поверхности турбины

$$H(r_1) = 0,$$

такъ какъ въ данномъ случаѣ $H(r_1) = H_k$. Между тѣмъ функція (34) удовлетворяетъ именно этому невѣрному условію.

Оставляя для турбины уравненія (35), т. е. функцію $H(r)$ въ видѣ (34), нужно добавить, что на *входной* поверхности имѣетъ мѣсто условіе (36), т. е. *относительная траекторія направлена радиально*.

Принимая же положеніе Г. Лоренца, т. е.

$$(w_t)_2 = \omega r_2 \dots \dots \dots (36)$$

для *выходной* поверхности придется уравненія для турбинъ писать въ видѣ (35,а).

Изъ всего предыдущаго вытекаетъ, что считая для *насосовъ* направление *входной абсолютной* скорости радиальнымъ, а для *турбинъ* то же для *входной относительной* скорости, можемъ пользоваться уравненіями (35) какъ для турбинъ, такъ и для насосовъ. Въ дальнѣйшемъ мы такъ и поступимъ.

15. Для $r = r_2$ уравненія (35) примутъ видъ:

$$(w_{tr})_2^2 - (w_{tr})_1^2 = \frac{4gH_k}{(r_2 - r_1)^2} \left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_2^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12} \right), \dots \dots (35,b)$$

$$[(w_{tr})_2 - \omega r_2]^2 (w_{tr})_2 = \frac{2g H_k r_2^2}{a(r_2 - r_1)},$$

причемъ изъ второго уравненія находимъ:

$$\omega = \frac{(w_{tr})_2}{r_2^2} \pm \frac{1}{r_2} \sqrt{\frac{2g H_k}{a(w_{tr})_2 (r_2 - r_1)}} \dots \dots (38)$$

Знакъ плюсь берется въ случаѣ насосовъ, для которыхъ

$$\omega r > w_t,$$

знакъ минусъ—для турбинъ, гдѣ

$$\omega r < w_t;$$

кромѣ того для насосовъ мы приняли

$$(w_{tr})_1 = 0,$$

а для турбинъ

$$(w_{tr})_1 = \omega r_1^2.$$

Останавливаясь на насосѣ, исключимъ $(w_{tr})_2$ изъ перваго уравненія (35,b) и (38); замѣчая что $a = \frac{4\pi n_1 k_1}{\rho Q}$, найдемъ:

$$\omega r_2^2 = AH_k^{1/2} + BQ_1^{1/2} H_k^{1/4}, \dots \dots \dots (39)$$

гдѣ

$$A^2 = \frac{4g}{(r_2 - r_1)^2} \left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_2^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12} \right), AB^2 = \frac{r_2^2}{2\pi n_1 k_1 (r_2 - r_1)},$$

$$Q_1 = \Delta Q. \dots \dots \dots (40)$$

Такимъ образомъ (34) есть уравненіе состоянія дискового насоса, связывающее расходъ (въ вѣсовыхъ единицахъ), полный напоръ колеса и число оборотовъ.

На основаніи (23) гидравлическій коэффициентъ полезнаго дѣйствія насоса напишется въ видѣ:

$$\tau_{hp} = \frac{gH_k}{\omega (w_{tr})_2} \dots \dots \dots (41)$$

Пользуясь (35,b) и (40) и имѣя въ виду, что для насоса

$$(w_t)_1 = 0,$$

находимъ, что

$$(w_{tr})_2 = A \sqrt{H_k}, \dots \dots \dots (42)$$

откуда гидравлическій коэффициентъ полезнаго дѣйствія дискового насоса приметъ видъ:

$$\tau_{hp} = \frac{g \sqrt{H_k}}{\omega A}$$

или

$$\tau_{hp} = K \frac{\sqrt{H_k}}{n}, \dots \dots \dots (43)$$

гдѣ

$$K = \frac{30g}{\pi A} \dots \dots \dots (44)$$

Замѣтимъ здѣсь, что теорія обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосовъ даетъ для гидравлическаго коэффициента полезнаго дѣйствія выраженіе

$$\tau_{hp} = K_1 \frac{H_m}{n^2}, \dots \dots \dots (45)$$

гдѣ

$$K_1 = \frac{900g \left(1 - \frac{tg \delta_a}{tg \beta_a} \right)}{\pi^2 r_2^2}.$$

Здѣсь δ_a и β_a углы абсолютной и относительной выходныхъ скоростей жидкости изъ колеса съ его окружностью; r_2 —радіусъ этой окружности. H_m —манометрическій напоръ, создаваемый насосомъ.

Уравненіе состоянія для турбины получится исключеніемъ $(w_t r)_2$ изъ тѣхъ же уравненій (35,b) и (38), но при условіи

$$(w_t r)_1 = \omega r_1^2,$$

что значительно усложнитъ видъ уравненія.

Гидравлическій коэффициентъ полезнаго дѣйствія турбины представится такъ:

$$\eta_{hm} = \frac{\omega [\omega r_1^2 - (w_t r)_2]}{g H_k} \dots \dots \dots (46)$$

Во всѣхъ предыдущихъ уравненіяхъ отсутствуетъ радіальная составляющая w_r , что понятно, такъ какъ мы съ самаго начала пренебрегли величиной C , гдѣ

$$C = \frac{Q}{2\pi s n_1} = w_r r \dots \dots \dots (7)$$

При подсчетахъ входной поверхности колеса мы должны будемъ вернуться къ этой величинѣ. Для колеса насоса мы можемъ прямо задаться w_r , и отсюда по данному Q опредѣлять остальные размѣры. Въ турбинахъ намъ долженъ быть данъ уголъ α наклона лопатки направляющаго аппарата къ радіусу, въ такомъ случаѣ

$$(w_r)_1 = (w_t)_1 ctg \alpha,$$

или:

$$(w_r r)_1 = (w_t r)_1 ctg \alpha;$$

но $(w_t r)_1 = \omega r_1$, поэтому уравненію (7), для турбины, можно придать видъ

$$\omega r_1 ctg \alpha = \frac{Q}{2\pi s n_1} \dots \dots \dots (47)$$

Этими соображеніями мы и закончимъ главу о теоріи дисковыхъ машинъ.

Глава III.

Опытное изслѣдованіе дискового насоса.

16. До сихъ поръ въ технической литературѣ не имѣется указаній на какіе либо, систематически поставленные, опыты съ дисковыми машинами; это обстоятельство, конечно не даетъ возможности практически оцѣнить пригодность вышеприведенной теоріи. Имѣя это ввиду, мы произвели рядъ опытовъ съ дисковымъ насосомъ, описаніе и результаты которыхъ мы приводимъ ниже.

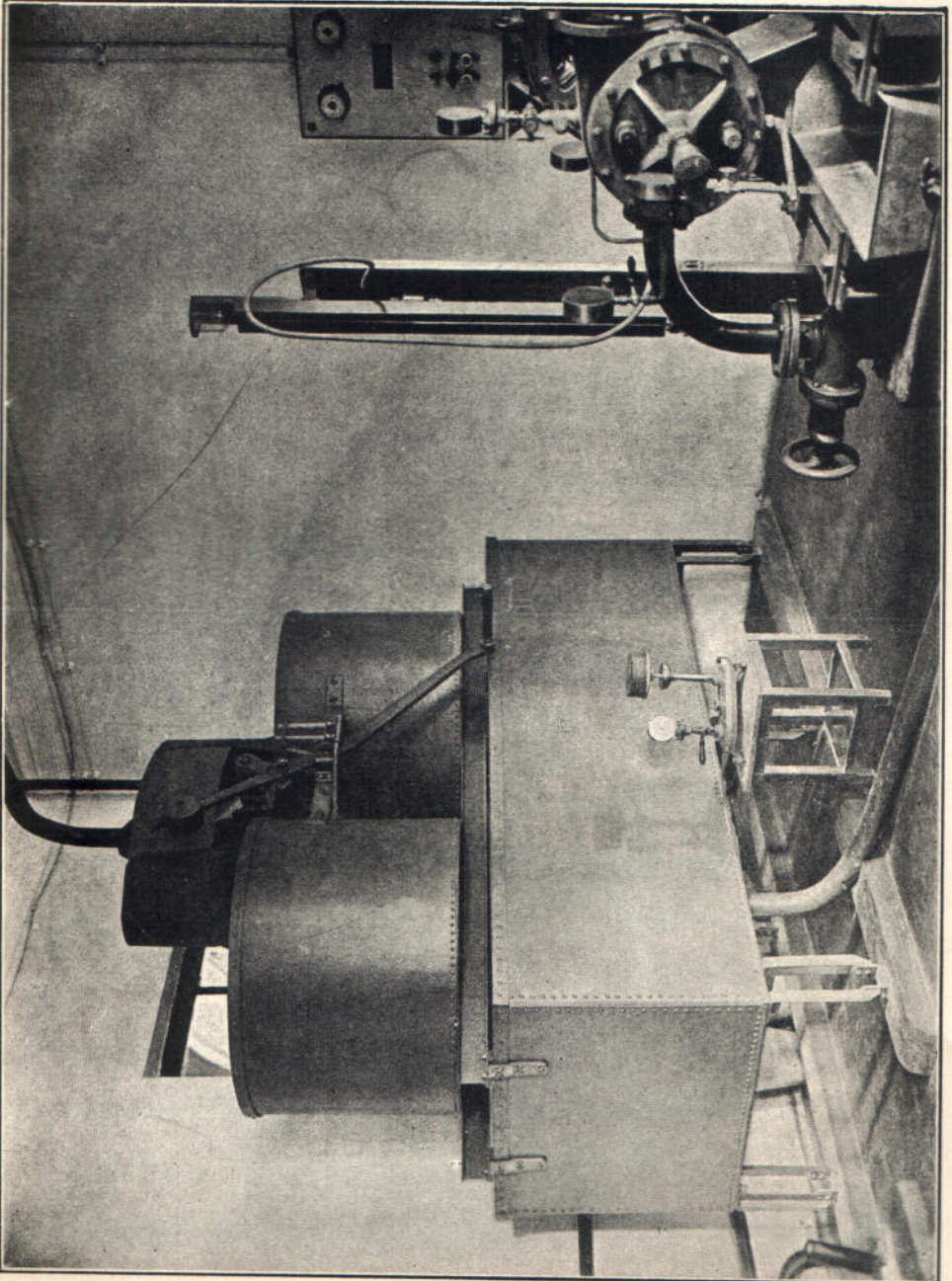
Лабораторныя средства *) не позволяли построить специальный насосъ, поэтому для опытовъ былъ приспособленъ имѣвшійся въ лабораторіи центробѣжный насосъ. Фиг. 5 и 6 даютъ представленіе о всей установкѣ, а на черт. 7 данъ конструктивный чертежъ насоса, подвергавшагося испытанію.

17. Рабочее колесо состоитъ изъ гладкихъ желѣзныхъ дисковъ, толщиной $2^m/m$, работающих кольцевой поверхностью наружнаго радіуса $r_2 = 160^m/m$, и внутренняго $r_1 = 80^m/m$, удерживаемыхъ на валу тремя ручками шириной въ $24^m/m$. Для измѣненія разстояній между дисками, между ними помѣщались желѣзныя прокладки наружнаго діаметра $50^m/m$ и толщиной въ $1^m/m$.

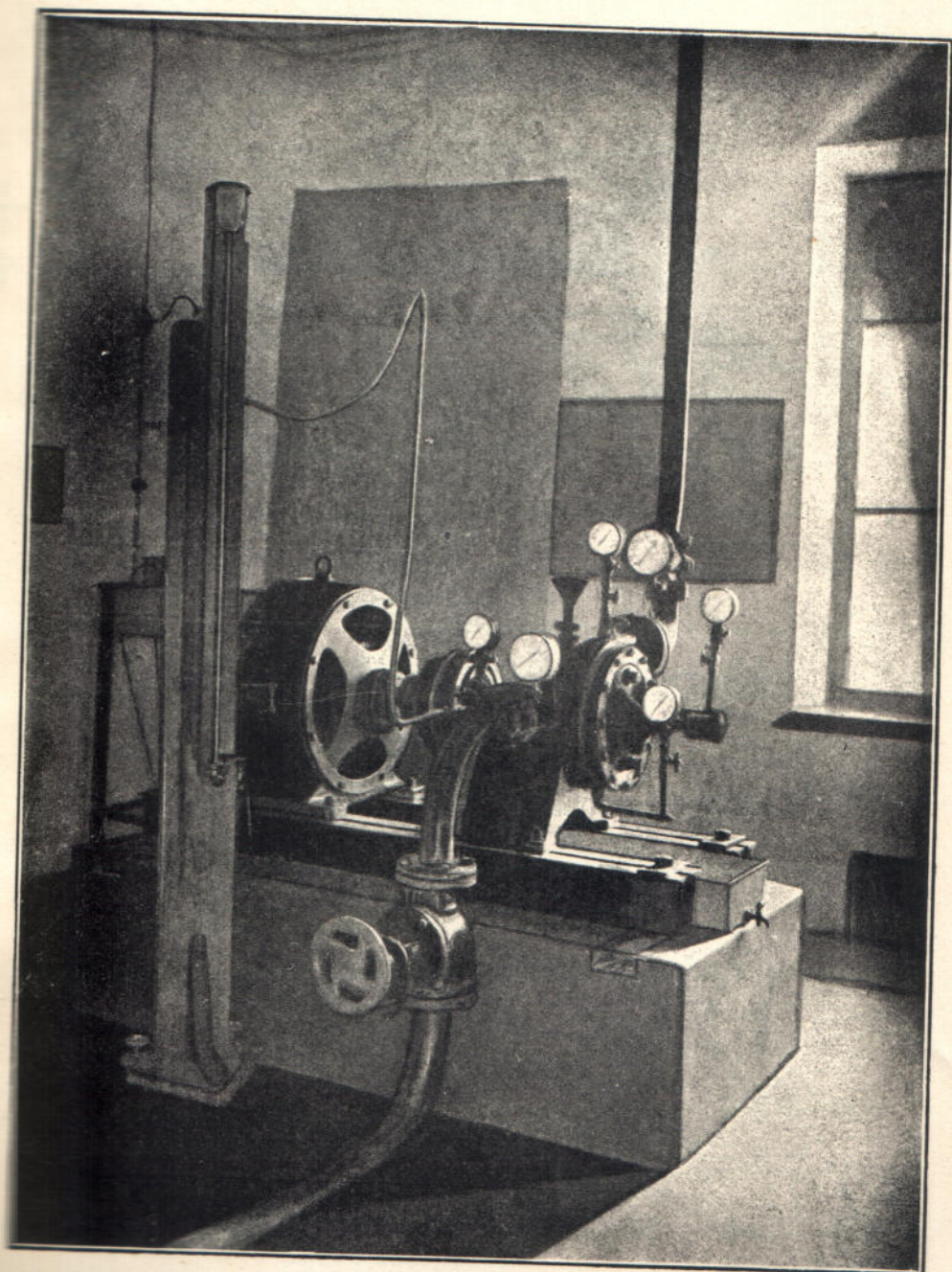
У наружнаго и внутренняго краевъ диски на протяженіи $5^m/m$ заостривались для болѣе плавнаго вступленія воды въ колесо и выхода изъ него. Диски зажимаются на валу между двумя установочными кольцами и образуютъ такимъ образомъ рабочее колесо, съ тѣмъ или инымъ числомъ дисковъ, въ зависимости отъ числа прокладочныхъ шайбъ между ними. Для устраненія осевыхъ перемѣщеній вала на наружномъ подшипникѣ устроенъ шариковый подпятникъ (на чертежѣ опорная часть удалена). Остальныя детали ясны изъ черт. 7.

18. Насосъ приводится въ движеніе электромоторомъ постояннаго тока завода А. Е. Г., работающимъ нормально при $E = 250$ и $J = 36$ (около 10 Н. Р.), съ переменнымъ числомъ оборотовъ отъ $n = 800$ до $n = 1500$, регулируемыхъ реостатомъ. Полезная мощность N_{em} отдаваемая на валъ насоса, опредѣлялась по кривымъ, составленнымъ для

*) Опыты производились въ гидравлической лабораторіи Кіевского Политехническаго Института Императора Александра II.



Фиг. 5.

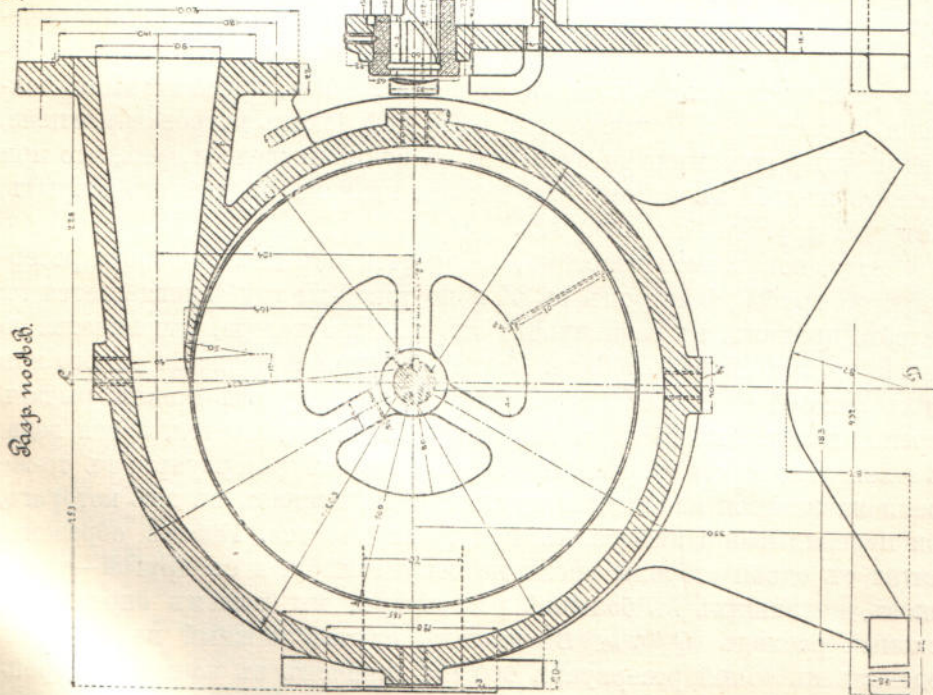


Фиг. 6.

Двиг. по 00.

Двухобъёмный насос.
сч.ч. Tesla.

Валик 60 мм
Самый 60 "



Черт. 7.

этого мотора при вышеуказанномъ числѣ оборотовъ; для промежуточнаго числа оборотовъ полезная мощность опредѣлялась интерполированиемъ. По вольтметру и амперметру опредѣлялись вольтажъ и сила тока, по силѣ тока изъ кривыхъ находилась полезная мощность N_{em} ; вольтметръ служилъ для контроля, такъ какъ кривыя могли считаться годными лишь при вольтажѣ равномъ или близкомъ къ 250 *E*. Число оборотовъ n вала насоса и мотора опредѣлялось счетчикомъ оборотовъ съ секундомѣромъ.

Основные элементы работы насоса: расходъ подаваемой воды Q_1 *ltr./sc.* и полный напоръ $H_{mtr.}$ учитывались: первый—водомѣрнымъ приспособленіемъ, а второй—манометромъ поставленнымъ у флянца нагнетательнаго штурцера и вакуметромъ у флянца всасывающаго штурцера. Манометръ и вакуметръ обыкновенной системы „Schäffer & Budenberg“; по манометру отсчеты производились въ фн./дм.², причеиъ десятыя доли фунта приходилось оцѣнивать на глазъ. Во время производства опытовъ манометръ нѣсколько разъ провѣрялся на приборъ Рухгольца (виденъ на фиг. 5); что же касается вакуметра, то за отсутствіемъ прибора для его повѣрки, параллельно съ нимъ былъ включенъ обыкновенный ртутный вакуметръ, показаніями котораго мы главнымъ образомъ и пользовались.

19. Водомѣрное устройство (фиг. 5) состоитъ изъ большого резервуара (ящика), размѣромъ 2805 × 1210 × 905^{мм.}, надъ которымъ, на двухъ двутавровыхъ балкахъ, помѣщаются два малыхъ цилиндрическихъ бака діаметромъ въ 1090^{мм.} и высотой 800^{мм.}; между этими баками укрѣплена ось на которой качается желобъ, приводимый въ движеніе рычагомъ съ противовѣсомъ. На днѣ баковъ устроены клапана, соединенные шарнирными звеньями съ концами желоба такъ, что при наклонѣ желоба къ одному изъ баковъ, клапанъ въ днѣ его закрытъ, а въ днѣ другого бака открытъ.

Вода, подаваемая насосомъ, забирается изъ дна большого резервуара по трубѣ діаметромъ въ 3" и по такой-же трубѣ нагнетается въ желобъ, причеиъ, въ зависимости отъ наклона желоба, наполняется то одинъ, то другой малый бакъ. Когда во время наполненія одного изъ этихъ баковъ, вода достигнетъ мѣтки на водомѣрномъ стеклѣ, рычагъ перекидывается, клапанъ въ днѣ этого бака открывается, и вся вода, въ нѣсколько секундъ, выливается въ большой резервуаръ; въ то-же время начинается наполненіе другого бака, клапанъ въ днѣ котораго, при перекидываніи желоба къ нему, закрывается. Такимъ образомъ, считая съ одной стороны время по секундомѣру, а съ другой—число баковъ, вытекшихъ въ большой резервуаръ, мы можемъ опредѣлить искомый расходъ Q_1 *ltr./sc.* Въ нашемъ случаѣ каждый малый бакъ подавалъ въ общій резервуаръ 600 *ltr.*, причеиъ въ нашемъ устройствѣ циркулировало все время одно и то-же количество воды.

20. Такой способъ опредѣленія расхода обладаетъ однимъ крупнымъ недостаткомъ на который необходимо указать. Дѣло въ томъ,

что за время наполненія одного изъ верхнихъ баковъ, вода изъ нижняго резервуара непрерывно отсасывается насосомъ, такъ, что уровень въ немъ все время понижается, т. е. статическая высота всасыванія непрерывно растетъ; исключеніе составляютъ тѣ нѣсколько секундъ (около 10) въ теченіе которыхъ вода изъ другого верхняго бака выливается въ нижній резервуаръ. Въ нашемъ случаѣ это пониженіе за время наполненія одного бака будетъ:

$$\frac{600}{12,1 \cdot 28,05} \approx 177 \text{ м./м.}$$

Такъ какъ уровень воды въ большомъ резервуарѣ находился всегда на высотѣ 355 м./м. надъ осью колеса, при верхнихъ пустыхъ бакахъ (т. е. статическая высота всасыванія была отрицательна), то во время работы насоса эта высота постепенно убывала, достигая половины ея, а затѣмъ, при перекидываніи желоба, вода устремлялась изъ верхняго бака въ нижній резервуаръ съ большой скоростью, увлекая съ собой воздухъ и нарушая этимъ, въ значительной мѣрѣ, вакуумъ.

Всѣ эти явленія, вмѣстѣ взятая, создавали неустановившійся процессъ работы насоса, особенно вліявшій на показанія вакуметра; насколько значительны были колебанія ртутнаго столба видно изъ численныхъ результатовъ опытовъ, приложенныхъ въ концѣ главы.

На показанія манометра неустановившійся ходъ насоса не оказывалъ столь рѣзкаго вліянія.

Всѣ эти обстоятельства показываютъ, что опыты производились въ довольно грубой технической обстановкѣ; поэтому мы считаемся, главнымъ образомъ, съ качественной но не количественной стороной ихъ. Примѣненіе болѣе точныхъ методовъ обработки результатовъ наблюдений (по теоріи наименьшихъ квадратовъ) было бы здѣсь нецѣлесообразнымъ ввиду ряда побочныхъ обстоятельствъ, аналитически не поддававшихся учету. Съ своей стороны лабораторныя средства не позволяли создать болѣе благоприятной обстановки для опытовъ.

21. Такъ какъ насъ интересуетъ главнымъ образомъ индикаторная работа колеса насоса, а не всего насоса какъ машины въ цѣломъ, то для нахождения ея мы опредѣляли полный напоръ H (въ теоріи H_k) развиваемый въ колесѣ, другими словами полную энергію колеса, рассчитанную на 1 kg. подаваемой воды. Эта энергія можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ: обозначая давленіе, скорость и высоту центра всасывающаго флянца надъ нѣкоторымъ уровнемъ черезъ p_1 , v_1 и z_1 , а черезъ p_2 , v_2 , z_2 тѣ-же величины у нагнетательнаго флянца, можемъ написать:

$$H = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + z_2 \right) - \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + z_1 \right) \dots \dots \dots (47)$$

По манометру опредѣлялось избыточное надъ атмосферой давленіе въ фн./дм.², а по вакуметру—недостающее до атмосферы въ $\frac{m}{m}$ ртутнаго столба. Поэтому, если p_m отсчетъ по манометру въ фн./дм.², а p_a давленіе атмосферы, то

$$\frac{p_2}{\Delta} = \frac{p_a}{\Delta} + \frac{10,33 p_m}{14,7} = \left(\frac{p_a}{\Delta} + h_d \right) mtr., \dots \dots \dots (48)$$

гдѣ

$$h_d = \frac{10,33 \cdot p_m}{14,7} \approx 0,703 p_m mtr. \dots \dots \dots (49)$$

Для открытаго ртутнаго вакуметра, обозначая черезъ p_v отсчеты въ $\frac{m}{m}$, имѣемъ:

$$\frac{p_1}{\Delta} = \frac{p_a}{\Delta} - \frac{10,33 \cdot p_v}{760} = \left(\frac{p_a}{\Delta} - h_s \right) mtr., \dots \dots \dots (50)$$

гдѣ

$$h_s = \frac{10,33 \cdot p_v}{760} \approx 0,0136 p_v mtr. \dots \dots \dots (51)$$

Если теперь обозначимъ превышеніе центра нагнетательнаго флянца надъ центромъ всасывающаго черезъ h_m , то изъ (47) найдемъ:

$$H = h_d + h_m + h_s + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}; \dots \dots \dots (52)$$

въ нашемъ случаѣ $h_m = 0,18 mtr.$

Такъ какъ діаметръ всасывающаго штурцера $0,07 mtr.$, а нагнетательнаго $0,09 mtr.$, то членъ, представляющій скоростной напоръ, не обращается въ нуль. Чтобы упростить расчеты мы вставили въ нагнетательный штурцерь коническую втулку внутренняго діаметра $0,07 mtr.$ и такимъ образомъ обратили въ нуль скоростной напоръ. Конечно этимъ путемъ мы понизили манометрическій напоръ, что въ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ избѣгается, но въ нашемъ случаѣ не имѣетъ значенія, такъ какъ насъ интересуетъ полная энергія, создаваемая колесамъ. Такимъ образомъ для колеса насоса будетъ:

$$H = H_k = (h_d + h_s + 0,18) mtr. \dots \dots \dots (53)$$

Необходимо замѣтить, что на самомъ дѣлѣ

$$H_k > H,$$

такъ какъ

$$H_k = H + R,$$

гдѣ R гидравлическія потери на путяхъ отъ всасывающаго флянца до входа въ колесо и отъ выхода изъ колеса до нагнетательнаго флянца. Ввиду сложной формы насосной камеры намъ не удалось опредѣлить эти потери даже теоретически.

Такимъ образомъ эффективная мощность колеса въ *H. P.* будетъ:

$$N_{ep} = \frac{Q_1 \cdot H}{75} \dots \dots \dots (54)$$

гдѣ Q_1 измѣрено въ *ltr./sc.* помощью водомѣрнаго устройства.

Утечка черезъ зазоръ, существующая въ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ, въ данномъ случаѣ не поддается учету. Наоборотъ—при малыхъ размѣрахъ пространства между наружными поверхностями крайнихъ дисковъ и боковыми стѣнками насосной камеры, возможенъ даже нѣкоторый положительный расходъ.

22. Изъ кривой для электромотора опредѣляется для данного числа оборотовъ полезная мощность N_{em} въ *H. P.*, отданная на валъ насоса, такъ что полный коэффициентъ полезнаго дѣйствія колеса насоса представится въ видѣ:

$$\tau_p = \frac{N_{ep}}{N_{em}} \dots \dots \dots (55)$$

Въ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ полный коэффициентъ полезнаго дѣйствія имѣеть нѣсколько иной видъ, такъ какъ въ немъ вмѣсто полнаго напора *H*, стоитъ манометрической напоръ H_m , въ которомъ отсутствуетъ членъ, характеризующій скоростной напоръ. Въ нашемъ случаѣ эти два напора, а слѣдовательно и коэффициенты полезнаго дѣйствія совпадаютъ, такъ какъ входная и выходная скорости у штурцовъ насоса равны.

23. Гидравлическій коэффициентъ полезнаго дѣйствія колеса представится такъ:

$$\tau_{hp} = \frac{N_{ep}}{N_{em} - N_r} \dots \dots \dots (56)$$

гдѣ N_r мощность, затраченная на механическія потери. Эти механическія потери, въ нашемъ случаѣ, двоякаго рода: потери на треніе въ опорахъ насоснаго вала и потери на треніе о воду наружныхъ поверхностей двухъ крайнихъ дисковъ колеса.

Потери перваго рода могли бы быть опредѣлены чисто опытнымъ путемъ, но для этого необходимъ былъ моторъ мощностью около 0,5 *H. P.* съ переменнымъ числомъ оборотовъ отъ 800 до 1500 и соответствующими кривыми къ нему, такъ какъ такого мотора въ нашемъ распоряженіи не было, то оцѣнка этихъ потерь произведена теоретически.

Обозначая удѣльное давленіе на вкладышъ подшипника черезъ *p*, имѣемъ

$$p = \frac{P}{ld},$$

гдѣ P полная нагрузка на вкладышъ, l длина, а d диаметръ его. Въ такомъ случаѣ мощность, потерянная на треніе будетъ:

$$L_r = ldp \mu v \frac{\text{kg}r. \text{mtr.}}{\text{sc.}},$$

гдѣ l и d берутся въ см., а v въ mtr./sc., μ коэффициентъ тренія.

Такъ какъ наибольшая скорость на окружности цапфы не превосходила въ нашихъ опытахъ 3 mtr./sc., то мы пользуемся формулой Лаше *).

$$p \mu t = 2,$$

гдѣ t температура вкладыша въ C^0 . Поэтому

$$L_r = 2 \frac{ldv}{t},$$

или, такъ какъ $v = \frac{\pi dn}{60.100}$ mtr./sc., гдѣ d въ см.

$$L_r = \frac{\pi n}{3000} \frac{ld^2}{t}.$$

Отсюда, для многоопорнаго вала потерянная на треніе мощность въ лошадиныхъ силахъ будетъ:

$$N'_r = \left[\frac{\pi}{75.3000} \sum \frac{ld^2}{t} \right] n \dots \dots \dots (57)$$

Въ нашемъ случаѣ валь расположенъ на трехъ опорахъ, для которыхъ, считая слѣва на право (черт. 7), имѣемъ:

$$l = 12 \text{ см.}, d = 3,5 \text{ см.}, t = 30^0; \quad l = 11,5 \text{ см.}, d = 4 \text{ см.}, t = 20^0; \quad l = 12 \text{ см.}, \\ d = 3 \text{ см.}, t = 20^0.$$

Приведенныя здѣсь температуры взяты какъ среднее изъ нѣсколькихъ наблюдений.

Такимъ образомъ находимъ:

$$N'_r = 0,000272 n \dots \dots \dots (58)$$

Ввиду незначительности осевыхъ усилій мы пренебрегаемъ треніемъ въ подпятникѣ.

Потери на треніе дисковъ о воду мы опредѣлимъ, пользуясь предположеніемъ, что сила тренія въ какой либо точкѣ диска, рассчитанная на единицу площади, пропорціональна квадрату скорости диска въ этой точкѣ, т. е. равна

$$k_1 (\omega r)^2,$$

*) См. М. Н. Берловъ. Детали машинъ. Вып. VIII. Подшипники. Рига. 1905 г.

гдѣ r разстояніе точки диска до оси. Относя силу къ 1 $mtr.$ ² и считая ее въ $kgr.$, примемъ $k_1 = 0,15$. Число это заимствовано изъ приведенной выше статьи Г. Лоренца; приблизительно такое же значеніе для k_1 находимъ и изъ опытовъ Унвина*).

Моментъ силы тренія для элементарной площадки диска напишется въ цилиндрическихъ координатахъ такъ:

$$[k_1 (\omega r)^2] (rd\varphi dr)r,$$

откуда для полной мощности, потерянной на треніе, въ Н. Р. находимъ выраженіе вида:

$$N''_r = \frac{2}{75} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{2\pi}{0} [k_1 (\omega r)^2] (rd\varphi dr) r \omega = \frac{4\pi k_1 \omega^3}{5.75} (r_2^5 - r_1^5), \right.$$

или, такъ $\omega = \frac{\pi n}{30}$

$$N''_r = \left[\frac{4\pi^4 k_1}{75.5.30^3} (r_2^5 - r_1^5) \right] n^3 \dots \dots \dots (59)$$

Подставляя въ эту формулу численныя значенія, находимъ:

$$N''_r = 58636 \cdot 10^{-14} n^3 \dots \dots \dots (60)$$

Такимъ образомъ полная мощность въ Н. Р., расходуемая на механическія потери, на основаніи (58) и (60) будетъ:

$$N_r = 0,000272 n + 58636 \cdot 10^{-14} n^3 \dots \dots \dots (61)$$

24. Опыты были разбиты на четыре группы, различавшіяся числомъ дисковъ въ колесѣ. Въ первой группѣ было 12 дисковъ съ разстояніями въ 1^m./m.; во второй—10 дисковъ съ разстояніями въ 2^m./m.; въ третьей—8 дисковъ съ разстояніями въ 3^m./m.; въ четвертой—7 дисковъ съ разстояніями въ 4^m./m.

Каждая группа состояла изъ четырехъ серій опытовъ. Серіи отличались установками задвижки на всасывающей трубѣ и крана на нагнетательной трубѣ. Въ первой (I) установкѣ кранъ и задвижка совершенно открыты; во второй (II)—кранъ открытъ, задвижка прикрыта на половину; въ третьемъ (III)—кранъ прикрытъ до мѣтки, задвижка — открыта; въ четвертой (IV)—кранъ прикрытъ до мѣтки, задвижка прикрыта на половину.

Этими установками создавались разныя геометрическія условія въ насосной сѣти при неизмѣнномъ числѣ оборотовъ, другими словами мѣнялся напоръ и расходъ при постоянномъ n .

*) См. проф. Д. П. Рузскій. Общая теорія машинъ. Кіевъ, 1910 г. Стр. 65.

Каждая серия содержит 10 или 11 испытаний, при разныхъ установкахъ на кнопки реостата, т. е. при переменномъ числѣ оборотовъ.

Результаты каждаго испытанія выводились какъ среднее изъ четырехъ или пяти наблюдений. Все остальное выясняется таблицами опытовъ, приложенными въ концѣ главы.

25. Для сопоставленія теоріи съ опытными результатами мы воспользовались уравненіемъ состоянія (39) для насоса:

$$\omega r_2^2 = AH_k^{1/2} + BQ_1^{1/2} H_k^{1/4}, \dots \dots \dots (39)$$

гдѣ

$$A^2 = \frac{4g}{(r_2 - r_1)^2} \left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_2^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12} \right), \quad AB^2 = \frac{r_2^2}{2\pi n_1 k_1 (r_2 - r_1)}, \quad Q_1 = \Delta Q, \quad (40)$$

и выраженіемъ для гидравлическаго коэффиціента полезнаго дѣйствія (43)

$$\eta_{hp} = K \frac{\sqrt{H_k}}{n}, \dots \dots \dots (43)$$

гдѣ

$$K = \frac{30g}{\pi A} \dots \dots \dots (44)$$

Изъ каждой группы опытовъ выбрано четыре установки реостата: на 0, 6, 9 и 11 кнопки, изъ которыхъ каждая должна была давать постоянное число оборотовъ; но вслѣдствіе колебанія вольтажа въ сѣти число оборотовъ мотора нѣсколько колебалось. Такъ какъ каждая установка повторяется въ группѣ четыре раза, то для четырехъ испытаній группы, отличающихся лишь геометрическими условіями сѣти, принято одно и то-же число оборотовъ, среднее для этихъ испытаній. Такимъ образомъ изъ нашихъ таблицъ опытовъ получилось четыре сводныхъ таблицы, которыя приводимъ ниже.

26. Для сопоставленія теоріи съ результатами опытовъ построены для каждой группы теоретическія кривыя (39) и (43), представляющія зависимости Q_1 и η_{hp} отъ H_k .

Въ нашемъ случаѣ для всѣхъ кривыхъ

$$A = 0,595, \quad B = \frac{0,758}{\sqrt{n_1}}$$

или, обозначая индексамъ число дисковъ колеса, получимъ:

$$B_{12} = 0,219, \quad B_{10} = 0,239, \quad B_8 = 0,268, \quad B_7 = 0,286,$$

гдѣ для числа k_1 взято прежнее значеніе 0,15.

Таблица I,

ЧИСЛО ДИСКОВЪ $n_1 = 12$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ $Q_{1, Itr.} / \text{с.}$	Полезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора N_{em}	Полный коэф. дѣйствія τ_p	Механ. потери N_f	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія τ_{hp}		Установка реостата.
										опыт.	теор.	
844	88,37	4,62	9,31	0,57	249,75	10,13	1,98	0,29	0,56	0,40	0,41	0 к.
		4,54	8,09	0,49	251,25	8,75	1,46	0,34	0,59	0,56	0,39	
		5,43	3,56	0,26	250,25	7,75	1,19	0,22	0,58	0,43	0,43	
		5,44	3,24	0,23	250,00	8,38	1,35	0,17	0,58	0,30	0,43	
1046	109,52	6,92	11,43	1,05	250,00	15,25	3,55	0,30	0,93	0,40	0,40	6 к.
		6,66	10,57	0,94	251,00	14,31	3,22	0,29	1,01	0,43	0,38	
		7,74	4,55	0,47	249,50	11,25	2,30	0,20	0,95	0,35	0,42	
		7,82	4,48	0,47	250,25	11,80	2,41	0,20	0,94	0,32	0,42	
1201	125,74	8,84	14,06	1,66	250,00	21,55	5,46	0,30	1,38	0,41	0,38	9 к.
		8,42	12,50	1,40	247,50	19,94	4,95	0,28	1,36	0,39	0,38	
		9,59	5,16	0,66	249,25	15,59	3,54	0,19	1,28	0,29	0,41	
		10,24	5,30	0,72	251,25	15,75	3,59	0,20	1,34	0,32	0,42	
1335	139,77	11,15	15,00	2,23	249,25	30,38	8,10	0,26	1,87	0,36	0,38	11 к.
		10,01	13,49	1,80	248,50	26,31	6,83	0,26	1,82	0,36	0,37	
		11,50	5,70	0,87	250,00	19,38	4,69	0,19	1,64	0,28	0,41	
		12,19	5,83	0,95	249,50	20,19	4,96	0,19	1,70	0,28	0,42	

Таблица II,
ЧИСЛО ДИСКОВЪ $n_1 = 10$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H_{итр.}$	Расходъ $Q_{литр./сек.}$	Потезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Потезн. работа мотора $N_{ем}$	Полный коэф. пол. дѣйствія $\eta_{р}$	Механ. потери N_r	Гидравл. коэф. ползев. дѣйствія $\eta_{гп}$		Установка реестата.
										опыт.	теор.	
844	88,37	4,71	7,84	0,49	251,75	8,50	1,41	0,35	0,59	0,59	0,40	0 к.
		4,57	8,33	0,51	251,50	9,06	1,58	0,32	0,58	0,51	0,40	
		5,66	3,85	0,29	251,25	7,94	1,24	0,23	0,59	0,45	0,44	
		5,61	3,75	0,28	249,75	3,54	1,76	0,16	0,56	0,23	0,44	
1039	108,78	6,91	10,31	0,95	251,50	13,75	3,05	0,31	0,95	0,45	0,40	6 к.
		6,58	10,81	0,95	249,00	14,80	3,43	0,28	0,92	0,38	0,39	
		7,77	4,80	0,50	249,75	11,75	2,41	0,21	0,90	0,33	0,43	
		8,37	4,95	0,55	250,00	13,16	2,84	0,19	0,98	0,30	0,43	
1190	124,59	8,77	12,24	1,43	250,00	19,94	4,96	0,29	1,34	0,40	0,39	9 к.
		8,55	12,64	1,44	250,25	19,81	4,92	0,29	1,33	0,40	0,38	
		10,19	5,62	0,76	249,75	15,31	3,46	0,22	1,29	0,35	0,43	
		10,22	5,61	0,76	249,50	16,25	3,77	0,20	1,29	0,31	0,42	
1316	138,10	10,53	13,63	1,91	250,50	25,81	6,70	0,28	1,73	0,38	0,38	11 к.
		10,51	14,53	2,04	250,00	29,25	7,73	0,26	1,80	0,34	0,38	
		12,02	6,19	0,99	249,50	19,50	4,75	0,21	1,63	0,32	0,42	
		12,09	6,22	1,00	249,75	20,50	5,07	0,20	1,66	0,29	0,42	

Таблица III,
ЧИСЛО ДИСКОВЪ $n_1 = 8$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ $Q_1 \text{ ltr. / sc.}$	Полезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора N_{em}	Полный коэф. под. дѣйствія τ_{np}	Механ. потери N_r	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія τ_{hpr}		Установка реостата.																										
										опыт.	теор.																											
830	86,90	3,94 4,25 5,06 5,03	7,93 7,42 3,22 3,21	0,42 0,42 0,22 0,22	249,75 249,50 251,25 250,25	8,58 8,29 7,55 7,50	1,43 1,36 1,10 1,09	0,29 0,31 0,20 0,20	0,56 0,55 0,56 0,56	0,48 0,52 0,41 0,41	0,38 0,39 0,43 0,42	0 к.																										
													1050	109,94	6,39 6,66 7,67 7,71	10,85 10,17 4,70 4,73	0,92 0,90 0,48 0,49	250,50 251,50 248,50 251,25	13,31 12,74 11,24 11,00	2,90 2,70 2,23 2,12	0,32 0,33 0,22 0,23	0,96 0,98 0,95 0,96	0,47 0,52 0,41 0,42	0,38 0,38 0,42 0,42	6 к.													
																										1199	125,54	8,05 8,27 9,91 10,06	12,69 11,79 5,46 5,52	1,36 1,30 0,72 0,74	248,75 248,75 249,50 251,50	18,63 17,94 15,10 15,00	4,53 4,31 3,39 3,34	0,30 0,30 0,21 0,22	1,35 1,34 1,32 1,32	0,43 0,44 0,35 0,37	0,37 0,38 0,42 0,42	9 к.

Таблица IV,

ЧИСЛО ДИСКОВЬ $n_1 = 7$.

Число оборотов n	Угловая скорость ω	Полный напор $H_{итр.}$	Расход $Q, \text{лтр./с.}$	Полезн. работа насоса $N_{пер}$	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора $N_{итр}$	Полный коэф. под. действия $\eta_{итр}$	Механ. потери N_r	Динам. коэф. под. действия $\eta_{итр}$		Установка реестата.
										опыт.	теор.	
827	86,59	3,58	7,54	0,36	249,50	8,50	1,42	0,25	0,56	0,42	0,36	0 к.
		3,80	6,90	0,35	248,75	8,14	1,30	0,27	0,55	0,47	0,37	
		4,48	2,92	0,17	250,00	7,25	1,02	0,17	0,55	0,36	0,40	
1047	109,62	4,57	3,21	0,20	250,75	7,50	1,10	0,18	0,56	0,37	0,41	6 к.
		5,48	10,56	0,77	249,75	13,38	2,92	0,26	0,96	0,39	0,35	
		6,03	9,61	0,77	250,00	12,25	2,54	0,30	0,95	0,42	0,37	
1194	125,01	7,03	4,42	0,41	249,50	10,50	1,97	0,21	0,95	0,40	0,40	9 к.
		7,19	4,90	0,47	249,00	10,75	2,03	0,23	0,96	0,44	0,40	
		7,02	12,24	1,15	249,00	18,53	4,51	0,25	1,33	0,36	0,35	
1305	136,63	7,63	11,32	1,15	247,75	16,81	3,95	0,29	1,31	0,44	0,37	11 к.
		8,98	5,15	0,62	251,75	14,00	3,03	0,20	1,31	0,36	0,40	
		9,08	5,71	0,69	249,75	14,53	3,20	0,22	1,33	0,37	0,40	
1305	136,63	8,43	13,73	1,54	249,50	24,13	6,20	0,25	1,72	0,34	0,34	11 к.
		9,04	12,63	1,52	250,25	21,31	5,33	0,29	1,64	0,41	0,36	
		10,55	5,65	0,79	250,00	16,84	3,89	0,20	1,62	0,35	0,40	
1305	136,63	10,84	6,30	0,91	248,00	17,63	4,15	0,22	1,65	0,36	0,40	11 к.

Такимъ образомъ уравненія кривыхъ состоянія, расположенныя по группамъ, напишутся въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} 2,262 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,219 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 2,804 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,219 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,219 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,219 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,578 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,219 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}. \end{aligned} \right\} n_1 = 12$$

$$\left. \begin{aligned} 2,262 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,239 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 2,785 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,239 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,189 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,239 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,535 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,239 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}. \end{aligned} \right\} n_1 = 10$$

$$\left. \begin{aligned} 2,225 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,268 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 2,814 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,268 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,214 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,268 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,530 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,268 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}. \end{aligned} \right\} n_1 = 8$$

$$\left. \begin{aligned} 2,217 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,286 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 2,806 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,286 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,200 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,286 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \\ 3,498 &= 0,595 H_k^{1/2} + 0,286 Q_1^{1/2} H_k^{1/4}. \end{aligned} \right\} n_1 = 7$$

Для кривыхъ (43)

$$K = 157,55;$$

уравненія ихъ для группъ получились одинаковыми ввиду незначительныхъ колебаній числа оборотовъ при одной и той-же установкѣ реостата. Для четырехъ основныхъ установокъ уравненія этихъ кривыхъ напишутся такъ:

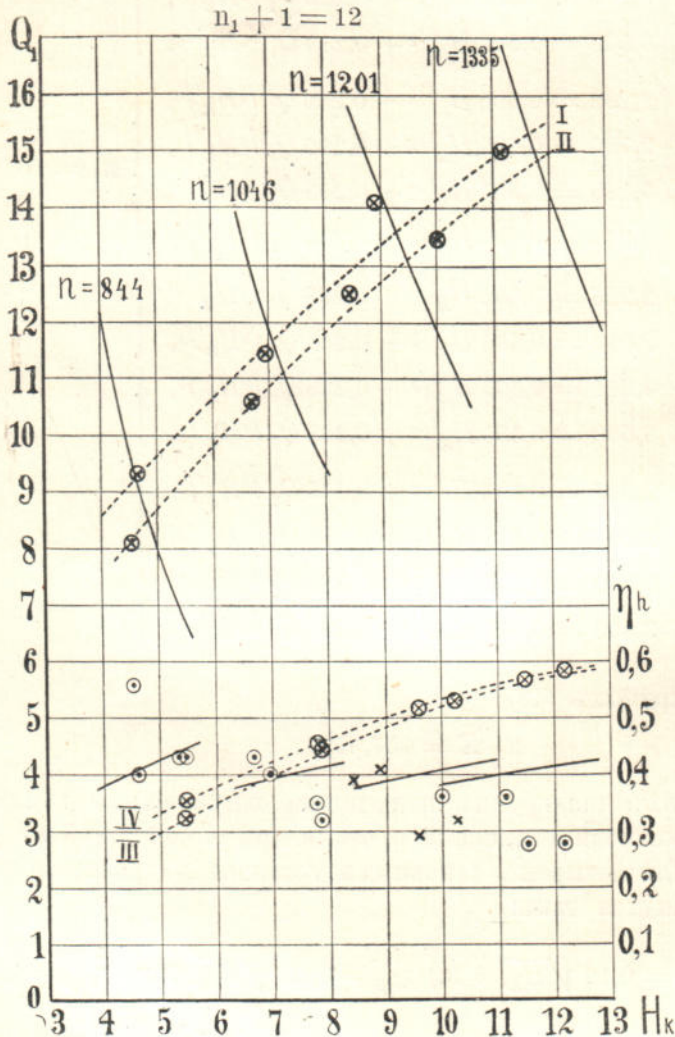
$$0 \text{ к.) } \tau_{hp} = 0,19 \sqrt{H_k}, \quad 6 \text{ к.) } \tau_{hp} = 0,15 \sqrt{H_k}, \quad 9 \text{ к.) } \tau_{hp} = 0,13 \sqrt{H_k},$$

$$11 \text{ к.) } \tau_{hp} = 0,12 \sqrt{H_k}.$$

Всѣ кривыя нанесены на прилагаемые графики (черт. 8, 9, 10, 11) параллельно съ опытными результатами. Кружками съ крестиками обозначены опытные точки, принадлежащія кривымъ состоянія, а кружками или крестиками—кривымъ коэффициентовъ полезнаго дѣйствія.

27. Разсмотрѣніе теоретическихъ кривыхъ состоянія и соответствующихъ имъ опытныхъ точекъ приводитъ къ нѣкоторымъ заключеніямъ.

Мы видимъ, что для каждой кривой имѣются двѣ пары точекъ, изъ которыхъ первая пара, соответствующая группѣ большихъ расходовъ, въ общемъ довольно хорошо удовлетворяетъ уравненію кривой, вторая же пара уже очевидно не подчиняется ему; при этомъ общей границей между наименьшими расходами для первыхъ паръ и наибольшими для вторыхъ является расходъ $Q_1 \approx 6,75 \text{ ltr./sc.}$



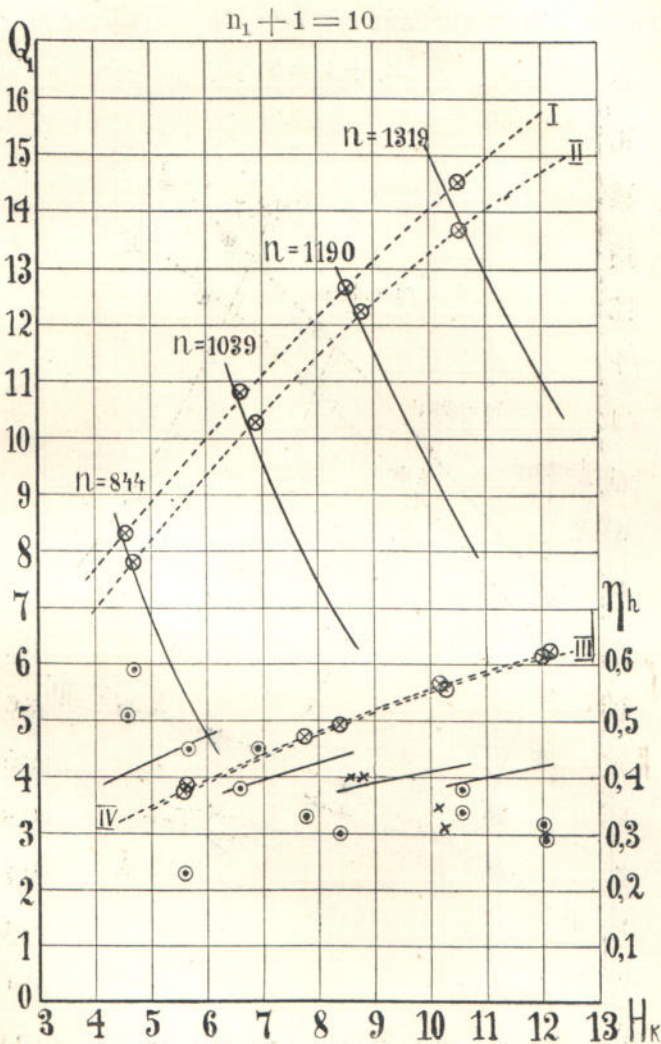
Черт. 8.

Замѣтимъ теперь, что движеніе воды въ колесѣ насоса есть теченіе жидкости между параллельными стѣнками, подчиняющееся, конечно, законамъ, изложеннымъ въ гл. XIII (ч. I), т. е. до извѣстныхъ скоростей, а слѣдовательно и расходовъ, движеніе будетъ струйное, а при большихъ скоростяхъ—турбулентное.

Въ нашемъ случаѣ это и имѣетъ мѣсто: первая пары точекъ, т. е. большіе расходы и скорости, удовлетворяютъ теоретическимъ

кривымъ, выведеннымъ въ предположеніи турбулентнаго движенія; при малыхъ же расходахъ относительныя скорости теченія воды между дисками оказываются повидимому ниже критическихъ скоростей и движеніе воды подчиняется струйному режиму.

Такимъ образомъ для всѣхъ колесъ нашего насоса, при данномъ



Черт. 9.

размѣръ дисковъ, получается нѣкоторая критическая радиальная входная скорость $(v_{rk})_1$ гдѣ

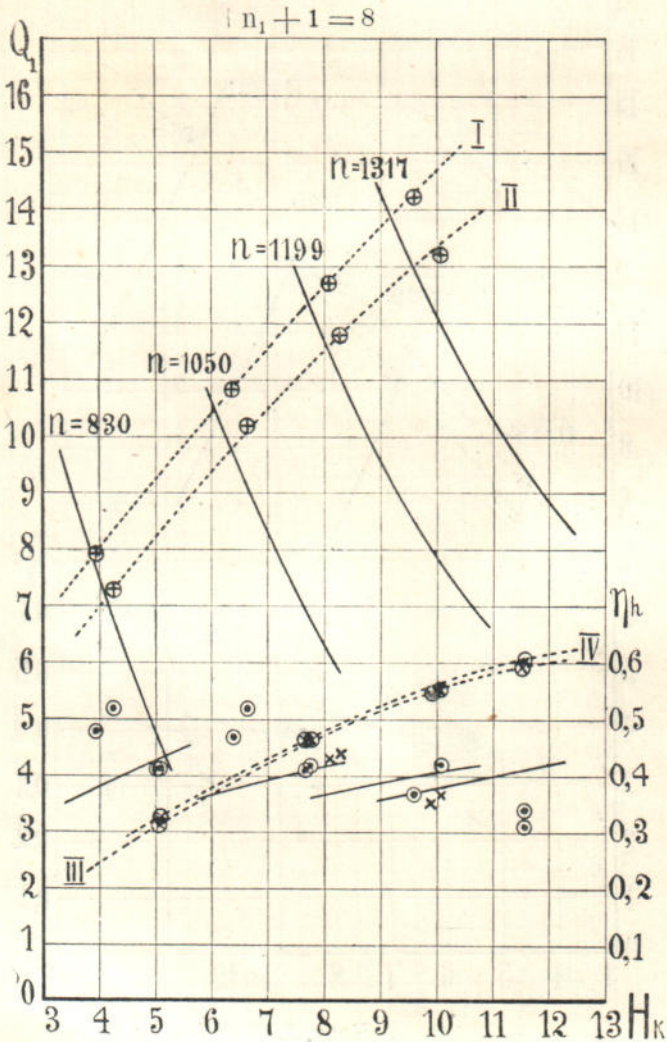
$$(v_{rk})_1 = \frac{Q_k}{2\pi r_1 n_1 s} \dots \dots \dots (62)$$

При $(v_r)_1$ большихъ этой скорости, т. е. при расходахъ большихъ Q_k . изложенная выше теорія примѣнима, а при меньшихъ расходахъ

пришлось бы пользоваться соображениями, изложенными в гл. XI § 59, ч. I. Для нашего случая $Q_k = 6,75 \text{ ltr./sc.}$ и $r_1 = 0,08 \text{ mtr.}$ Поэтому

$$(v_{rk})_1 = \frac{0,0134}{n_1 s} \text{ mtr./sc.} \dots \dots \dots (63)$$

где s расстояние между дисками в mtr. , $(n_1 + 1)$ —число дисковъ.

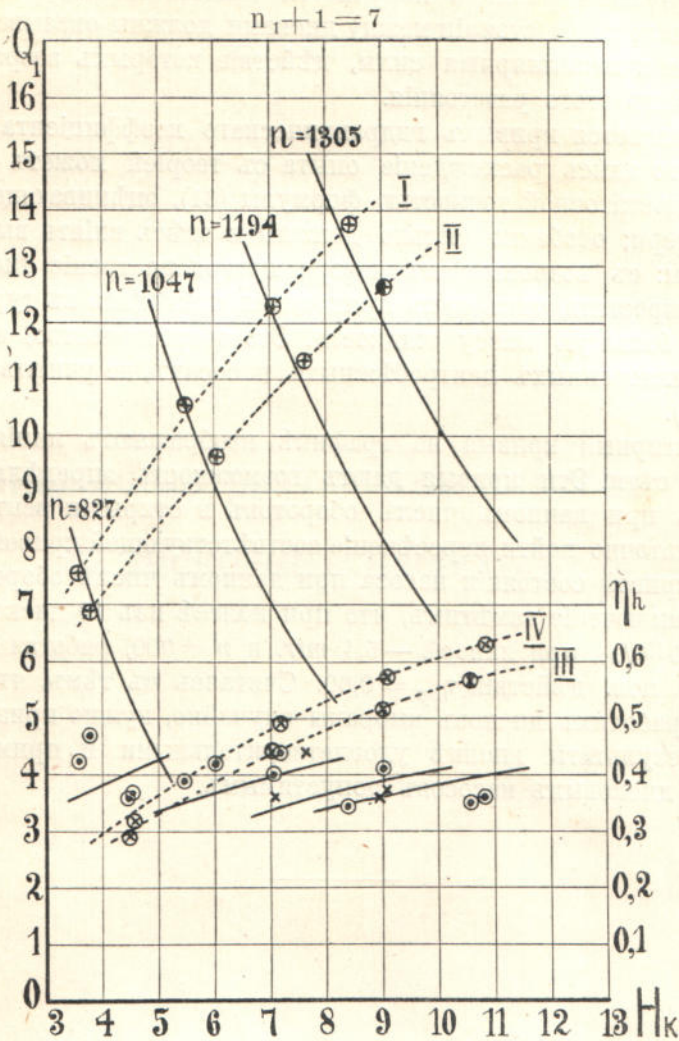


Черт. 10.

Мы видимъ, что и здѣсь критическая скорость подчиняется общему закону, выраженному в § 77 гл. XIII ч. I, т. е., критическая скорость обратно пропорциональна линейному размѣру живого сѣченія, пропускающаго жидкость.

Кромѣ того при разсмотрѣннн кривыхъ мы замѣчаемъ, что колеса съ 10 и 7 дисками лучше удовлетворяютъ высказанному положенію,

чѣмъ колеса съ 12 и 8 дисками. Это обстоятельство можетъ быть объяснено вліяніемъ зазоровъ между наружными поверхностями дисковъ колеса и стѣнками насосной камеры.



Черт. 11.

Въ нашемъ случаѣ эти зазоры будутъ:

$$z_{12} = \frac{40 - (2.12 + 1.11)}{2} = 2,5 \text{ м./м.}, \quad z_{10} = \frac{40 - (2.10 + 2.9)}{2} = 1 \text{ м./м.},$$

$$z_8 = \frac{40 - (2.8 + 3.7)}{2} = 1,5 \text{ м./м.}, \quad z_7 = \frac{40 - (2.7 + 4.6)}{2} = 1 \text{ м./м.},$$

гдѣ индексы обозначаютъ число дисковъ колеса.

Такимъ образомъ для колеса съ 12 и 8 дисками зазоры больше

чѣмъ при 10 и 7 дискахъ; въ особенности ненормаленъ этотъ зазоръ у колеса съ 12 дисками, гдѣ рабочее разстояніе всего $1^m/m$. Очевидно что при большихъ зазорахъ возникаетъ обратная утечка воды, такъ что теоретическій расходъ получается больше наблюдаемаго; кромѣ того при маломъ разстояніи между дисками должны оказывать извѣстное вліяніе и капиллярныя силы, дѣйствіе которыхъ возрастаетъ съ уменьшеніемъ этого разстоянія.

Что касается кривыхъ гидравлическаго коэффициента полезнаго дѣйствія, то здѣсь расхожденіе опыта съ теоріей можетъ быть объяснено недостаточной точностью формулы (61), оцѣнивающей механическія потери; особенно сильно должны и здѣсь вліять вышеуказанные зазоры: съ возростаніемъ зазора потеря на треніе диска о воду должна возрастать, такъ какъ приходится приводить въ турбулентное состояніе большую массу жидкости. Это обстоятельство, замѣченное и при обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ, не учитывается формулой (61).

Пунктирныя кривыя на графикѣ изображаютъ линіи равныхъ состояній сѣти. Эти кривыя даютъ возможность опредѣлять напоръ и расходъ при данномъ числѣ оборотовъ и открытіи вентилей. Для этого достаточно найти пересѣченіе соотвѣтствующей кривой состоянія сѣти съ кривой состоянія насоса при данномъ числѣ оборотовъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что при колесѣ изъ 10 дисковъ насосъ давалъ — 9 ltr./sc. при напорѣ — $5,4\text{ mtr.}$ и $n = 900$, работая съ гидравлич. коэф. пол. дѣйствія $\eta_{hp} = 0,60$. Считаясь съ тѣмъ, что размѣры насоса и рабочихъ дисковъ выбраны случайно, нужно признать полученные результаты вполне удовлетворительными и примѣненіе на практикѣ дисковыхъ насосовъ допустимымъ.

Численные результаты опытовъ
съ дисковымъ насосомъ.

Первая группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 12 дисковъ съ разстояніями въ 1 м./м.

№ станция на кнопка	Нагнетаніе.		Всасываніе.		Полн. напоръ	Расходъ Q_1 л./с.	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора насоса N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическая потеря N_r	Гидравл. коэф. полез. дѣйствія насоса η_{hp}
	p_m	Среднее значеніе h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v				h_s mtr.	$H_{mtr.}$	E	J	n	Среднее значеніе J				
1	5,70		25			21,600	0,57	249	10,00	830			1,98				
	5,75		30			1354		250	10,25	835							
	5,75	4,04	30	29,50	0,40	= 9,31	0,57	250	10,00	838	10,13	833	1,98	0,29	0,56	0,40	0,41
2	5,80	5,75	33					249,75	10,25	830							
	5,70		30			11,600		250	9,50	861							
	6,00	4,18	30	29,80	0,41	678	0,62	249	9,75	862	9,70	865	1,80	0,34	0,61	0,52	0,40
3	6,00		33					250	9,75	866							
	6,10	5,94	28			= 9,82	0,62	250	9,75	867							
	7,00	7,04	51	49,80	0,68	5,81	0,79	249	12,00	904	11,95	916	2,56	0,31	0,70	0,42	0,41
4	7,10		52			21,600		249	12,00	918							
	7,00		48			1233		250	12,00	920							
	7,10	4,95	48	49,80	0,68	= 10,22	0,79	250	11,75	923	12,00	916	2,56	0,31	0,70	0,42	0,41
5	7,10	7,06	51	49,80	0,60	5,74	0,84	249	12,00	961	11,50	954	2,34	0,36	0,77	0,53	0,39
	7,00		45					250	11,50	961							
	7,00		43			12,600		249	11,50	954							
6	7,10		43			656		251	11,25	954							
	8,50		60			10,600		250	15,25	1030							
	8,30	5,91	65	61,25	0,83	6,92	1,05	250	15,25	1034	15,00	1033	3,55	0,30	0,93	0,40	0,40
7	8,40		65					249	11,50	955							
	8,40	8,40	65			= 11,43	1,05	250	15,00	1033	15,25	1033	3,55	0,30	0,93	0,40	0,40
	8,90		60			10,600		250	15,25	1030							
8	9,00		63			507		250	16,50	1099							
	9,10		60					248	16,25	1097							
	9,20	6,37	64	62,40	0,85	7,40	1,17	252	16,25	1102	16,40	1100	3,89	0,30	1,08	0,42	0,38
9,10	9,06	64	62,40	0,85	7,40	1,17	252	16,50	1100	16,40	1100	3,89	0,30	1,08	0,42	0,38	

8	7	10,00 9,80 9,80 10,10 10,10	9,96	7,00	79,80	1,09	8,27 = 12,86 933	1,42	250 250 250 250	250 250 250 250	19,00 19,00 19,50 19,50	19,20 1144	1143	4,76	0,30	1,19	0,40	0,39
"	8	10,75 10,70 10,60 10,70 10,70	10,67	7,50	85,00	1,16	8,84 = 14,06 896	1,66	250 249 248 252	250 21,50 21,75 21,50 21,50	21,50 1210 1212 1218 1217	1215	5,46	0,30	1,38	0,41	0,38	
"	9	11,50 11,80 11,60 11,50 11,60	11,60	8,15	99,00	1,35	9,68 = 14,68 654	1,89	250 250 250 250	26,00 25,00 25,00 25,00	1267 1272 1272 1277	1272	6,56	0,29	1,55	0,38	0,38	
"	10	13,25 13,25 13,40 13,50	13,35	9,39	116,50	1,58	11,15 = 15,00 480	2,23	250 249 250	30,50 30,00 30,00	1369 1363 1363	1366	8,10	0,26	1,87	0,36	0,38	
"	11	5,00 5,20 5,20 5,30	5,18	3,64	53,25	0,72	4,54 = 8,09 741	0,49	249 252 252	8,50 8,75 8,75	849 843 848	847	1,46	0,34	0,59	0,56	0,39	
"	12	5,20 5,20 5,30 5,30	5,26	3,70	50,60	0,69	4,57 = 8,29 651	0,51	250 250 250 250	9,25 9,25 9,25 9,25	850 862 862 869	862	1,66	0,31	0,61	0,48	0,39	
"	13	6,00 6,00 6,00	6,00	4,22	63,75	0,87	5,27 = 9,04 531	0,64	252 252 252	10,50 10,25 10,25	935 924 929	930	2,00	0,32	0,72	0,50	0,39	
"	14	6,00 6,10 6,20 6,10	6,10	4,29	70,00	0,95	5,42 = 9,34 578	0,67	248 250 250	11,25 11,00 11,00	955 954 955	955	2,20	0,31	0,77	0,47	0,38	

Установка вентиляц. на кондиц. № испытания.	Нагнетание.		Всасывание.		Полн. напор. $H_{mtr.}$	Расход $Q_{1, sc.}$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полез. ная работа мотора N_{em}	Пол- ный коэф. полез. дѣят. насоса η_{np}	Меха- ниче- ская потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйств. насоса $\eta_{гпр}$
	p_m	Сред- нее значе- ние p_m $mtr.$	h_d	Сред- нее значе- ние p_v $mtr.$				h_s	E	Сред- нее значе- ние E	J	Сред- нее значе- ние J	n				
II	7,50	95	5,17	96,25	1,31	$\frac{9,600}{511}$ 10,57	0,94	250	14,50	1069	3,22	0,29	1,01	0,38			
	7,40	95		252				14,25	1071								
	7,20	100		252				14,00	1071								
	7,30	95		250				14,50	1067								
"	7,60	107	5,41	108,25	1,47	$\frac{10,600}{540}$ 11,11	1,05	248	15,50	1091	3,59	0,29	1,07	0,38			
	7,60	108		250				15,75	1096								
	7,70	110		250				15,25	1092								
	7,90	108		250				15,25	1099								
"	8,30	122	5,83	121,00	1,65	$\frac{10,600}{524}$ 11,45	1,17	250	17,75	1168	4,24	0,28	1,24	0,38			
	8,30	122		250				17,50	1163								
	8,30	120		251				17,50	1166								
	8,30	120		250				17,50	1163								
"	9,00	135	6,33	140,25	1,91	$\frac{15,600}{720}$ 12,50	1,40	246	20,00	1201	4,95	0,28	1,36	0,38			
	8,80	140		247				20,00	1202								
	9,20	144		247				20,00	1209								
	9,00	142		250				19,75	1210								
"	10,00	150	6,96	153,5	2,09	$\frac{10,600}{468}$ 12,82	1,58	249	23,50	1288	5,96	0,27	1,61	0,37			
	10,00	158		250				23,25	1290								
	9,80	153		248				23,25	1294								
	9,80	153		250				23,25	1292								
"	10,70	170	7,52	169,5	2,31	$\frac{11,600}{489}$ 13,49	1,80	249	26,25	1354	6,83	0,26	1,82	0,37			
	10,60	172		248				26,25	1359								
	10,70	168		249				26,25	1356								
	10,80	168		248				26,50	1350								

III	0	21	7,80 7,75 7,80 7,75	7,78	5,46 -12	-15 -18 -16 -12	-15,25	-0,21	5,43	$\frac{3,600}{505} = 3,56$	0,26	252 250 249 250	250,25	7,75 7,75 7,75 7,75	848 845 846 849	847	1,19	0,22	0,58	0,43	0,43
"	2	22	8,50 8,40 8,40 8,40	8,43	5,93 -8	-15 -15 -7 -8	-11,25	-0,15	5,96	$\frac{4,600}{638} = 3,76$	0,30	250 250 250 251	250,25	8,25 8,25 8,25 8,25	887 887 888 888	888	1,37	0,22	0,65	0,42	0,43
"	3	23	8,70 8,75 8,75 8,60	8,70	6,12 -13	-12 -13 -13 -13	-12,75	-0,17	6,13	$\frac{3,600}{467} = 3,85$	0,31	252 252 352 248	251,00	8,75 8,75 8,75 8,75	909 909 901 895	904	1,43	0,22	0,68	0,41	0,43
"	4	24	9,20 9,30 9,20 9,30	9,25	6,50 -11	-11 -13 -12 -11	-11,75	-0,16	6,52	$\frac{1,600}{150} = 4,00$	0,35	250 249 250 249	249,50	9,25 9,25 9,25 9,25	934 937 941 941	938	1,61	0,22	0,74	0,40	0,43
"	6	25	10,80 10,90 10,90 10,90	10,83	7,65 -8	-3 -9 -7 -8	-6,75	-0,09	7,74	$\frac{3,600}{396} = 4,55$	0,47	250 250 250 248	249,50	11,25 11,25 11,25 11,25	1040 1041 1041 1041	1042	2,30	0,20	0,95	0,35	0,42
"	7	26	11,75 11,80 11,60 11,80	11,74	8,25 -4	-3 -8 -4 -4	-4,75	-0,06	8,37	$\frac{3,600}{378} = 4,76$	0,53	250 250 248 250	249,50	12,50 12,50 12,25 12,25	1084 1098 1087 1089	1090	2,53	0,21	1,06	0,36	0,42
"	8	27	12,75 12,90 12,80 13,00	12,86	9,04 -5	-2 -6 -5 -5	-4,50	-0,06	9,16	$\frac{3,600}{362} = 4,97$	0,61	250 250 250 250	250,00	14,00 14,00 13,75 14,00	1138 1139 1134 1144	1139	3,06	0,20	1,18	0,32	0,42
"	9	28	13,50 13,50 13,25 13,50	13,44	9,45 -7	-4 -1 0 -7	-3,00	-0,04	9,59	$\frac{3,600}{349} = 5,16$	0,66	250 249 248 250	249,25	15,75 15,75 15,60 15,25	1176 1178 1181 1184	1180	3,54	0,19	1,28	0,29	0,41

Установка вентилятора	Установка регулятора на кнопки	№ испытанія	Нагнетаніе		Всасываніе		Полн. напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ Q_1 lt./sc.	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты		Амперы		Число оборот.		Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механич. потери N_r	Гидравл. коэф. полез. дѣйстія насоса η_{hp}			
			p_m	Среднее значеніе h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v				h_s mtr.	E	Среднее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n					Среднее значеніе n		
III	10	29	14,60		3			$\frac{5,600}{550}$		251	251	16,80	1236									
			14,70		0					251	250	16,75	1232									
			14,60		2					250	250	16,75	1235									
			14,60	10,28	0	1,25	0,02	10,48	$= 5,45$	0,76	250	250,50	16,60	1233	3,90	0,19	1,44	0,31	0,41			
"	11	30	16,00		2			$\frac{5,600}{526}$		250	250	19,25	1302									
			16,10		6					250	250	19,50	1301									
			16,00		2					250	250	19,25	1302									
			16,00	11,27	4	3,50	0,05	11,50	$= 5,70$	0,87	250	250,00	19,50	1296	4,69	0,19	1,64	0,28	0,41			
"	12	31	17,80		10			$\frac{5,600}{495}$		250	250	22,75	1375									
			17,80		5					250	250	22,75	1377									
			17,75		0					249	249	22,70	1368									
			17,00	12,37	0	3,75	0,05	12,60	$= 6,06$	1,02	249	249,50	22,50	1384	5,69	0,18	1,90	0,27	0,41			
IV	0	32	7,60		-12			$\frac{3,600}{556}$		250	250	8,50	843									
			7,60		-3					250	250	8,50	846									
			7,60		-5					249	249	8,25	848									
			7,70	5,36	-8	-7,00	-0,10	5,44	$= 3,24$	0,23	251	250,00	8,25	850	1,35	0,17	0,58	0,30	0,43			
"	2	33	8,40		-7			$\frac{4,600}{652}$		250	250	8,75	883									
			8,20		-2					249	249	8,25	887									
			8,30		-1					249	249	8,30	886									
			8,25	5,79	-3	-3,25	-0,04	5,93	$= 3,68$	0,29	250	249,50	8,30	892	1,36	0,21	0,65	0,41	1,43			
"	3	34	9,00		-3			$\frac{4,600}{606}$		250	250	9,25	928									
			9,00		-6					250	250	9,25	930									
			8,90		-6					249	249	9,25	928									
			8,90	6,29	+1	-3,50	-0,05	6,42	$= 3,96$	0,34	249	249,50	9,25	933	1,67	0,20	0,72	0,36	0,43			

"	4	35	9,25 9,10 9,25 9,20	9,20	6,47	-3 0 -2 0	-1,25 -- 0,02	6,63	$\frac{3,600}{451} = 3,99$	0,35	251 251 251 250	250,75	9,75 9,75 9,75 9,75	944 944 947 945	945	1,77	0,20	0,75	0,34	0,43
"	6	36	10,75 10,80 10,80 10,75	10,78	7,58	3 4 3 8	4,50	7,82	$\frac{3,600}{402} = 4,48$	0,47	250 250 251 250	250,25	11,75 12,00 11,75 11,70	1036 1041 1043 1042	1041	2,41	0,20	0,94	0,32	0,42
"	7	37	11,80 11,80 11,75 11,80	11,79	8,29	5 5 6 8	6,00	8,55	$\frac{5,600}{630} = 4,76$	0,54	250 250 250 250	250,00	12,75 12,75 12,75 12,75	1092 1084 1088 1095	1089	2,69	0,20	1,04	0,33	0,42
"	8	38	13,00 12,90 12,80 12,80	12,87	9,05	7 10 10 11	9,50	9,36	$\frac{5,600}{600} = 5,00$	0,62	250 249 250 250	249,75	14,25 14,25 14,25 14,25	1140 1141 1141 1138	1140	3,22	0,19	1,18	0,30	0,42
"	9	39	14,00 14,00 14,00 14,20	14,05	9,88	13 15 15 11	13,50	10,24	$\frac{6,600}{679} = 5,30$	0,72	251 251 252 251	251,25	15,75 15,75 15,75 15,75	1202 1201 1204 1203	1202	3,59	0,20	1,34	0,32	0,42
"	10	40	15,40 15,30 15,40 15,20 15,30	15,32	10,77	13 16 16 18 14	15,40	11,16	$\frac{5,600}{541} = 5,55$	0,82	251 250 250 250 250	250,20	18,25 18,00 18,00 18,00 17,75	1252 1258 1245 1251 1247	1255	4,30	0,19	1,50	0,29	0,42
"	11	41	16,80 16,60 16,75 16,75	16,72	11,75	18 22 18 19	19,25	12,19	$\frac{5,600}{515} = 5,83$	0,95	250 250 249 249	249,50	20,00 20,25 20,25 20,25	1320 1315 1317 1318	1318	4,95	0,19	1,70	0,28	0,42

Вторая группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 10 дисковъ съ разстояніями въ 2 м./м.

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	Нагнетаніе.		Всасываніе.		Полн. напоръ	Расходъ $Q_{1t}/sc.$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты.		Амперы.	Число оборот.		Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. насоса η_{np}	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. полез. насоса η_{hp}	
		p_m	Среднее значеніе p_m	h_d mtr.	p_v				Среднее значеніе p_v	h_s mtr.		E	Среднее значеніе E					J
I	0	6,30	12				7,600			251	8,50	846						
		6,10	14				$\frac{536}{}$			252	8,50	846						
		6,00	13					0,49		252	8,50	852						
		6,25	20	4,33	14,75	0,20	4,71	$= 7,84$		252	8,50	855	850	1,41	0,35	0,59	0,40	
"	2	6,60	21				8,600			249	9,25	880						
		6,70	20				$\frac{562}{}$			249	9,25	894						
		6,80	20					0,57		252	9,25	889						
		6,60	26	4,70	21,75	0,30	5,18	$= 8,54$		250	9,25	886	887	1,62	0,35	0,65	0,40	
"	3	7,30	24				10,600			250	10,00	930						
		7,25	25				$\frac{664}{}$			250	10,00	926						
		7,20	25					0,68		250	10,00	926						
		7,30	28	5,10	25,50	0,35	5,63	$= 9,04$		250	10,25	930	927	1,88	0,36	0,72	0,60	0,40
"	4	7,10	33				11,600			248	11,20	948						
		7,25	26				$\frac{730}{}$			251	11,00	942						
		7,40	27					0,69		250	11,20	947						
		7,50	30	5,14	29,00	0,39	5,71	$= 9,04$		250	11,00	949	946	2,24	0,31	0,75	0,46	0,40
"	6	8,75	41				9,600			250	13,75	1046						
		8,70	45				$\frac{524}{}$			252	13,75	1041						
		8,60	48					0,95		252	13,75	1045						
		8,70	48	6,11	45,50	0,62	6,91	$= 10,31$		252	13,75	1043	1044	3,05	0,31	0,95	0,45	0,40
"	7	9,40	53				9,600			248	15,50	1090						
		9,25	52				$\frac{495}{}$			248	15,50	1086						
		9,40	50					1,09		250	15,50	1093						
		9,50	53	6,60	52,00	0,71	7,49	$= 10,91$		250	15,60	1093	1090	3,59	0,30	1,06	0,43	0,40

8	10,00	55	57,50	0,78	$\frac{10,600}{524}$	7,95 = 11,45	1,21	249	17,50	1143	4,16	0,29	1,17	0,40	0,39
	10,00	56						249	17,50	1139					
	10,00	61						249	17,00	1139					
	9,80	58	57,50	0,78	$\frac{10,600}{524}$	7,95 = 11,45	1,21	249	17,25	17,31	1138	4,16	0,29	1,17	0,39
9	10,80	68			$\frac{10,600}{490}$	10,600		250	20,00	1205					
	10,80	70						250	20,00	1199					
	11,11	68						250	20,00	1197					
	10,80	69	68,75	0,94	$\frac{10,600}{467}$	8,77 = 12,24	1,43	250	19,75	19,94	1200	4,96	0,29	1,34	0,39
10	11,80	75			$\frac{10,600}{467}$	10,600		250	22,25	1257					
	11,80	75						250	22,25	1255					
	11,90	73						249	22,25	1253					
	11,60	76	74,75	1,02	$\frac{10,600}{440}$	9,48 = 12,42	1,57	249	22,25	22,25	1256	5,63	0,28	1,50	0,39
11	13,00	88			$\frac{10,600}{440}$	10,600		250	25,50	1324					
	13,10	90						250	25,75	1326					
	13,00	88						251	25,75	1327					
	13,00	85	87,75	1,19	$\frac{10,600}{440}$	10,53 = 13,63	1,91	251	26,25	25,81	1327	6,70	0,28	1,73	0,38
11	5,25	52			$\frac{8,600}{576}$	8,600		252	9,00	846					
	5,25	50						252	9,00	843					
	5,25	53						251	9,25	844					
	5,25	52	51,75	0,70	$\frac{8,600}{576}$	4,57 = 8,33	0,51	251	9,00	9,06	846	1,58	0,32	0,58	0,40
11	5,75	58			$\frac{8,600}{538}$	8,600		251	9,75	885					
	5,80	60						252	9,75	882					
	5,80	60						250	9,75	884					
	5,75	60	59,50	0,81	$\frac{8,600}{538}$	5,05 = 8,92	0,60	250	9,75	9,75	884	1,80	0,33	0,64	0,40
2	6,00	71			$\frac{9,600}{573}$	9,600		250	10,50	926					
	6,00	73						250	10,70	923					
	6,10	72						250	9,60	926					
	6,10	72	72,00	0,98	$\frac{9,600}{573}$	5,41 = 9,42	0,68	250	10,50	10,33	923	1,98	0,34	0,71	0,53
3	6,60	78			$\frac{10,600}{601}$	10,600		250	11,50	968					
	6,60	81						250	11,70	970					
	6,70	82						250	11,75	968					
	6,60	84	81,25	1,11	$\frac{10,600}{601}$	5,95 = 9,98	0,79	250	11,75	11,68	968	2,42	0,33	0,79	0,48
4	6,60	84	81,25	1,11	$\frac{10,600}{601}$	5,95 = 9,98	0,79	250	11,75	11,68	968	2,42	0,33	0,79	0,48

III	0	21	8,00 8,00 7,90 8,00	7,98	5,61	-8 -7 -8	-9,50	-0,13	5,66	$\frac{5,600}{780}$	0,29	251,25	251 251 252 252	7,75 8,25 8,00 7,75	846 853 846 852	849	1,24	0,23	0,59	0,45	0,44
"	2	22	8,75 8,75 8,75 8,75	8,75	6,15	-10 -10 -11 -10	-11,50	-0,16	6,17	$\frac{4,600}{590}$	0,34	251,25	251 251 251 252	8,50 8,50 8,50 8,50	883 893 887 890	888	1,39	0,24	0,65	0,46	0,44
"	3	23	9,50 9,40 9,25 9,30	9,36	6,58	-6 -7 -8	-8,00	-0,11	6,65	$\frac{4,600}{558}$	0,38	251,00	252 252 250 250	9,00 9,20 9,00 9,25	926 930 922 926	926	1,56	0,24	0,72	0,43	0,44
"	4	24	10,00 10,10 10,20 10,20	10,13	7,12	-10 -10 -9 -11	-10,00	-0,14	7,16	$\frac{4,600}{525}$	0,44	250,00	248 248 252 252	10,00 10,00 10,00 10,00	973 975 978 977	976	1,82	0,24	0,81	0,43	0,43
"	6	25	10,90 10,90 11,00 11,00	10,95	7,70	-9 -7 -8 -8	-8,00	-0,11	7,77	$\frac{4,600}{500}$	0,50	249,75	250 250 250 249	12,00 11,75 11,75 11,50	1016 1022 1025 1028	1023	2,41	0,21	0,90	0,33	0,43
"	7	26	12,20 12,10 12,10 12,10	12,13	8,53	-9 -8 -7 -4	-7,00	-0,10	8,61	$\frac{4,600}{473}$	0,58	249,50	249 249 250 250	12,75 1080 12,75 12,50	1071 1080 1081 1082	1079	2,67	0,22	1,03	0,35	0,43
"	8	27	13,20 13,25 13,20 13,20	13,21	9,29	-3 -2 -1 0	-1,50	-0,02	9,45	$\frac{4,600}{450}$	0,67	250,50	250 251 251 250	13,70 13,75 13,75 13,75	1133 1131 1131 1136	1133	2,98	0,22	1,16	0,37	0,43
"	9	28	14,40 14,25 14,20 14,20	14,26	10,02	-5 0 0 +1	-1,00	-0,01	10,19	$\frac{5,600}{534}$	0,76	249,75	250 250 250 249	15,50 15,25 15,25 15,25	1182 1180 1183 1181	1182	3,46	0,22	1,29	0,35	0,43

Установка вентилятора	Установка реостата на кнопки	№ испытания	Нагнетание		Всасывание		Полн. напор $H_{mtr.}$	Расход $Q_1 / sc.$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты		Амперы		Число оборот.		Полезная работа мотора N_{em}	Полный полез. д'йстви. насоса η_p	Механич. потери N_r	Гидравл. коэф. пол. д'йстви. насоса η_{hp}			
			p_m	Среднее значение p_m	h_d mtr.	p_v				Среднее значение p_v	h_s mtr.	E	Среднее значение E	J	Среднее значение J					n	Среднее значение n	
III	10	29	15,60	+0				$\frac{6,600}{609}$			251	17,00	1240									
			15,50	+3							250	17,00	1242									
			15,40	+6							251	17,00	1240									
			15,50	-3	+1,50	+0,02	11,10	0,87	= 5,91		250	250,50	17,00	1245	3,98	0,22	1,46	0,34	0,42			
"	11	30	16,75	1				$\frac{9,600}{872}$			250	19,25	1296									
			16,80	6							250	19,50	1293									
			16,80	0							249	19,50	1298									
			16,90	0	1,75	0,02	12,02	0,99	= 6,19		249	249,50	19,75	1296	4,75	0,21	1,63	0,32	0,42			
"	12	31	19,00	9				$\frac{8,600}{726}$			250	23,70	1382									
			19,10	2							250	23,00	1381									
			19,00	7							250	23,00	1376									
			19,10	3	5,25	0,07	13,64	1,20	= 6,61		250	250,00	23,75	1387	5,95	0,20	1,94	0,30	0,42			
IV	0	32	7,60	0				$\frac{4,600}{640}$			250	9,40	828									
			7,90	-8							248	9,50	828									
			8,00	-6							250	9,75	840									
			7,80	-6	-5,00	-0,07	5,61	0,28	= 3,75		251	249,75	9,50	836	1,76	0,16	0,56	0,23	0,44			
"	2	33	8,40	-6				$\frac{4,600}{609}$			250	10,00	873									
			8,40	-7							250	10,00	878									
			8,40	-5							250	9,75	878									
			8,40	-5	-5,75	-0,08	6,01	0,31	= 3,92		250	250,00	10,00	877	1,88	0,16	0,63	0,25	0,44			
"	3	34	9,00	-1				$\frac{3,600}{431}$			249	10,50	915									
			9,00	-3							249	10,25	921									
			9,20	-1							252	10,50	922									
			9,20	-6	-2,75	-0,04	6,54	0,36	= 4,17		250	250,00	10,25	923	2,00	0,18	0,71	0,28	0,44			

"	4	35	9,80 10,00 9,80 9,90	9,88	6,95	0 0 +1	-0,75	-0,01	7,12	$\frac{5,600}{675} = 4,44$	0,42	250 251 249	250,00	11,00 11,00 11,00 10,75	10,94	964	2,16	0,19	0,78	0,30	0,44
"	6	36	11,50 11,60 11,50 11,60	11,55	8,12	10 3 2 6	5,25	0,07	8,37	$\frac{5,600}{606} = 4,95$	0,55	250 250 250 250	250,00	13,00 13,25 13,40 13,00	13,16	1059	2,84	0,19	0,98	0,30	0,43
"	7	37	12,50 12,50 12,50 12,50	12,50	8,79	10 5 6 8	7,25	0,10	9,07	$\frac{5,600}{580} = 5,17$	0,63	250 250 249 250	249,75	14,25 14,00 14,25 14,00	14,13	1102	3,13	0,20	1,09	0,31	0,43
"	8	38	13,10 13,20 13,10 13,10	13,13	9,23	13 8 10 11	10,50	0,14	9,55	$\frac{5,600}{555} = 5,41$	0,69	252 251 251 251	251,25	16,25 16,25 15,75 15,75	16,00	1131	3,74	0,18	1,16	0,27	0,43
"	9	39	14,00 14,00 14,00 14,00	14,00	9,84	12 14 15 18	14,75	0,20	10,22	$\frac{5,600}{535} = 5,61$	0,76	250 249 249 250	249,50	16,25 16,25 16,25 16,25	16,25	1182	3,77	0,20	1,29	0,31	0,42
"	10	40	15,25 15,20 15,30 15,25	15,25	10,72	20 22 15 20	19,25	0,26	11,16	$\frac{5,600}{509} = 5,90$	0,88	250 250 250 250	250,00	17,25 17,25 17,00 17,00	17,13	1245	4,01	0,22	1,47	0,35	0,42
"	11	41	16,80 16,75 17,00 16,80	16,59	11,66	18 22 16 18	18,50	0,25	12,09	$\frac{5,600}{482} = 6,22$	1,00	249 250 250 250	249,75	20,50 20,50 20,50 20,50	20,50	1305	5,07	0,20	1,66	0,29	0,42
"	12	42	18,80 18,90 19,20 19,00	18,98	13,34	28 25 26 31	27,50	0,37	13,89	$\frac{5,600}{453} = 6,62$	1,23	252 250 250 251	250,75	25,50 25,00 25,25 25,00	25,19	1396	6,47	0,19	1,97	0,27	0,42

Третья группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 8 дисковъ съ разстояніями въ 3 м./м.

Установка вентилей.	Установка реек на шпонки.	№ опыта.	Нагнетаніе.		Всасываніе.		Потр. напоръ.	Расходъ $Q_{1.т.}/sc.$	Полез. работа насоса		Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора		Полный коэф. полез. дѣйств. насоса		Гидравл. коэф. полез. дѣйствія насоса																								
			p_m	Среднее значеніе h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе h_s mtr.			N_{ep}	E	J	Среднее значеніе E	$N_{ст}$	η_p	N_r	опытн. теорет.																													
1	0	1	5,00	3,55	12	0,21	3,94	7,600	0,42	249	8,75	823	1,43	0,29	0,48	0,38	823	8,75	829	832	834	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																
			5,00		16																									5,50	22	7,600	249	9,20	864	9,00	870	9,00	869	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
			5,10		17																									5,60	23	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
"	2	2	5,10	3,55	17	0,21	3,94	7,93	0,42	250	8,40	832	1,43	0,29	0,48	0,38	832	8,40	832	834	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																	
			5,10		17																								5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38	
			5,10		17																								5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38	
"	3	3	6,20	4,36	28	0,39	4,93	7,600	0,60	252	9,75	918	1,80	0,33	0,54	0,38	918	10,00	918	922	918	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																
			6,20		28																									5,50	22	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
			6,20		29																									5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
"	4	4	6,75	4,77	33	0,46	5,41	5,600	0,70	252	10,75	961	2,11	0,33	0,53	0,38	961	10,75	959	963	960	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																
			6,75		35																									5,50	22	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
			6,80		33																									5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
"	6	6	7,80	5,52	52	0,69	6,39	10,600	0,92	250	13,50	1051	2,90	0,32	0,47	0,38	1051	13,25	1049	1053	1050	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																
			7,90		50																									5,50	22	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
			7,90		50																									5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
"	7	7	7,80	5,52	52	0,69	6,39	10,85	1,06	250	14,75	1105	3,33	0,32	0,47	0,38	1105	14,75	1101	1104	1104	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																
			8,40		55																									5,50	22	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
			8,50		58																									5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
"	8	8	8,40	5,91	55	0,78	6,87	11,52	1,06	252	14,50	1150	3,33	0,32	0,47	0,38	1150	14,75	1104	1104	1104	864	870	869	870	9,05	0,62	0,51	0,38																
			8,30		55																									5,50	22	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38
			8,30		55																									5,60	20	498	249	9,00	870	9,00	869	9,00	870	9,00	868	9,05	0,62	0,51	0,38

8	9,10 9,20 9,10 9,00	6,40 9,10	69 65 65 62	65,25 0,89	7,47 = 12,12	1,22	252 252 249	16,50 16,50 16,75 16,50	1150 1154 1147 16,56 1148	3,89	0,31	1,21	0,46	0,37
9	9,80 9,75 9,80 9,75	6,88 9,78	70 78 73 71	73,00 0,99	10,600 473	1,36	248 249 249	18,50 18,75 18,75 18,50	1206 1205 1204 18,63 1206	4,53	0,30	1,35	0,43	0,37
10	10,60 10,70 10,50 10,50	7,44 10,58	83 85 82 85	83,75 1,14	10,600 447	1,55	249 249 249 249	21,50 21,50 22,25 22,25	1262 1266 1263 21,88 1268	5,52	0,28	1,53	0,39	0,37
11	11,50 11,50 11,50 11,40	8,07 11,48	100 98 98 100	99,00 1,35	10,600 423	1,82	250 250 250 250	26,00 26,00 26,00 25,75	1338 1345 1339 25,94 1329	6,73	0,27	1,77	0,37	0,37
11	5,00 5,00 5,00 5,00	3,52 5,00	39 39 42 41	40,25 0,55	6,600 485	0,42	251 250 249	8,40 8,25 8,25 8,25	826 828 826 8,29 828	1,36	0,31	0,55	0,52	0,39
12	5,40 5,50 5,50 5,40	3,83 5,45	48 48 48 51	48,75 0,66	7,600 510	0,51	252 252 252	8,80 8,80 8,80	878 873 877 8,80 876	1,47	0,35	0,63	0,60	0,39
13	5,90 6,00 5,90 5,90	4,17 5,93	53 53 59 60	56,25 0,77	7,600 491	0,58	251 251 251	9,50 9,40 9,50	913 911 915 9,48 913	1,69	0,34	0,69	0,58	0,39
14	6,20 6,30 6,30 6,20	4,39 6,25	63 60 65 65	63,25 0,86	8,600 531	0,65	248 248 249	10,25 10,25 10,25	953 965 955 10,25 953	2,00	0,33	0,77	0,53	0,38

Установка вентилятора	№ на испытании	Нагнетание		Всасывание		Число оборот.		Полезная работа мотора N_{em}	Подный коэф. полез. работы насоса η_p	Механические потери насоса N_r	Гидравл. коэф. полез. работы насоса η_{hp}				
		p_m	Среднее значение p_m	h_d	Среднее значение p_v	h_s	Расход $Q_{1th./sc.}$					Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты	Амперы	Число оборот.
		p_m	Среднее значение p_m	h_d	Среднее значение p_v	h_s	Расход $Q_{1th./sc.}$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты	Амперы	Число оборот.	Полезная работа мотора N_{em}	Подный коэф. полез. работы насоса η_p	Механические потери насоса N_r	Гидравл. коэф. полез. работы насоса η_{hp}
		p_m	Среднее значение p_m	h_d	Среднее значение p_v	h_s	Расход $Q_{1th./sc.}$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты	Амперы	Число оборот.	Полезная работа мотора N_{em}	Подный коэф. полез. работы насоса η_p	Механические потери насоса N_r	Гидравл. коэф. полез. работы насоса η_{hp}
II	6	7,40	85	5,27	88,75	1,21	$\frac{12,600}{708}$	0,90	248	12,70	1046	2,70	0,33	0,98	0,38
		7,50													
		7,50													
		7,60													
"	7	7,90	102	5,61	99,25	1,35	$\frac{10,600}{561}$	1,02	250	14,20	1099	3,12	0,33	1,08	0,38
		8,00													
		8,00													
		8,00													
"	8	8,50	111	5,98	111,00	1,51	$\frac{9,600}{481}$	1,21	248	15,75	1147	3,65	0,33	1,19	0,38
		8,50													
		8,50													
		8,50													
"	9	9,20	125	6,40	124,25	1,69	$\frac{9,600}{458}$	1,30	248	18,00	1200	4,31	0,30	1,34	0,38
		9,20													
		9,20													
		9,10													
"	10	9,80	140	6,99	144,25	1,96	$\frac{10,600}{482}$	1,52	248	20,00	1265	5,03	0,30	1,53	0,38
		10,00													
		10,00													
		10,00													
"	11	10,80	160	7,65	162,25	2,21	$\frac{10,600}{454}$	1,77	251	23,25	1323	5,95	0,30	1,72	0,38
		10,80													
		11,00													
		10,90													

III	0	21	7,20 7,25 7,20 7,25	7,23	5,08 —13	—14,75	—0,20	5,06	$\frac{4,600}{746} = 3,22$	0,22	250 252 252 251	251,25	7,60 7,50 7,50 7,60	833 828 836 831	7,55	832	1,10	0,20	0,56	0,41	0,43
"	2	22	8,00 7,75 7,75 7,90	7,85	—15 —8 —8 5,52	—10,50	—0,14	5,56	$\frac{3,600}{488} = 3,69$	0,27	250 250 250 250	250,00	8,00 8,00 8,00 8,00	866 865 868 868	8,00	867	1,21	0,22	0,62	0,46	0,43
"	3	23	8,50 8,60 8,50 8,50	8,53	—12 —11 —7 6,00	—9,00	—0,12	6,06	$\frac{3,600}{453} = 3,97$	0,32	248 250 250 250	249,50	8,50 8,50 8,50 8,50	907 913 913 912	8,50	911	1,36	0,24	0,69	0,48	0,43
"	4	24	9,25 9,20 9,20 9,25	9,23	—11 —9 —11 6,49	—10,75	—0,15	6,52	$\frac{4,600}{569} = 4,22$	0,37	250 250 250 250	250,00	9,30 9,50 9,40 9,40	956 955 959 957	9,40	957	1,63	0,23	0,77	0,43	0,42
"	6	25	10,80 10,80 10,80 10,80	10,80	—9 —7 —7 7,59	—7,00	—0,10	7,67	$\frac{4,600}{511} = 4,70$	0,48	249 248 249 248	248,50	11,25 11,25 11,25 11,20	1044 1044 1045 1046	11,24	1045	2,23	0,22	0,95	0,41	0,42
"	7	26	11,90 11,80 11,60 11,80	11,78	—5 —4 —2 8,28	—4,50	—0,06	8,40	$\frac{4,600}{485} = 4,95$	0,55	248 248 248 248	248,00	12,50 12,50 12,40 12,40	1093 1091 1098 1095	12,45	1094	2,58	0,21	1,07	0,36	0,42
"	8	27	12,75 12,75 12,70 12,80	12,75	—2 +3 —8 8,96	—3,25	—0,04	9,10	$\frac{5,600}{578} = 5,19$	0,63	250 249 250 249	249,50	13,75 13,75 13,75 13,60	1140 1148 1146 1137	13,71	1143	2,97	0,21	1,19	0,35	0,42

Установка вентиля,	Установка релюста на кнопки,	Нагнетание,		Всасывание,		Подп. напор.		Расход Q_1 lt./sc.	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты,		Амперы, J	Число оборот.		Полезная работа мотора N_{em}	Полный coeff. полез. д-тейт. насоса η_p	Механическая погери N_r	Гидравл. coeff. пол. д-тейтвия насоса η_{hp}		
		p_m	h_d mtr.	p_v	Среднее значение p_v	h_s mtr.	Подп. $H_{mtr.}$			E	Среднее значение E		n	Среднее значение n					J	n
III	9	13,90		-3				5,600			249	15,20	1196							
		13,90		-3				549			250	15,20	1194							
		13,75		+3						0,72	249	15,00	1193							
		13,80	9,73	-3	0,00	0,00	9,91		5,46		250	15,00	1198	1195	3,39	0,21	1,32	0,35	0,42	
" "	10	15,00		-1				5,600			249	16,75	1246							
		15,00		+2				525			249	16,80	1247							
		15,00		+3						0,81	248	16,75	1244							
		14,80	10,51	-2	+0,50	0,01	10,70		5,71		249	16,75	1253	1248	3,88	0,21	1,48	0,34	0,41	
" "	11	16,20		2				5,600			248	19,00	1299							
		16,00		4				502			249	19,00	1300							
		16,10		8						0,92	248	19,25	1305							
		16,00	11,28	0	3,50	0,05	11,51		5,98		249	19,00	1305	1302	4,60	0,20	1,65	0,31	0,41	
IV	0	7,10		-12				3,600			250	7,50	831							
		7,10		-12				561			251	7,50	831							
		7,00		-6						0,22	250	7,50	832							
		7,10	4,98	-9	-9,75	-0,13	5,03		3,21		250	7,50	827	830	1,09	0,20	0,56	0,41	0,42	
" "	2	7,60		-7				3,600			250	7,60	870							
		7,60		-8				487			249	7,60	863							
		7,40		0						0,27	249	7,40	864							
		7,50	5,29	-2	-4,25	-0,06	5,41		3,70		249	7,50	868	866	1,09	0,25	0,61	0,56	0,42	
" "	3	8,30		-2				4,600			253	8,50	918							
		8,40		-4				60			252	8,50	911							
		8,30		-2						0,32	251	8,50	919							
		8,40	5,87	-5	-3,25	-0,04	6,01		4,00		251	8,50	918	917	1,36	0,24	0,70	0,48	0,42	

4	34	9,00 9,00 9,10 9,10	9,05	6,36	-3 -2 -5 -5	-3,75 — 0,05	6,49	$\frac{3,600}{422} = 4,27$	0,37	251 251 251 252	251,00	9,25 9,25 9,25 9,25	954 961 958 960	958	1,59	0,23	0,77	0,45	0,42
6	35	10,60 10,60 10,70 10,75	10,66	7,49	2 0 5 4	2,75 0,04	7,71	$\frac{4,600}{507} = 4,73$	0,49	250 252 251 252	251,25	11,00 11,00 11,00 11,00	1046 1049 1046 1050	1048	2,12	0,23	0,96	0,42	0,42
7	36	11,60 11,60 11,60 11,60	11,60	8,15	5 6 8 8	6,75 0,09	8,42	$\frac{4,600}{478} = 5,02$	0,56	251 251 250 250	250,50	12,25 12,25 12,25 12,25	1099 1090 1100 1102	1098	2,50	0,22	1,08	0,39	0,42
8	37	12,60 12,40 12,30 12,60	12,48	8,77	8 13 13 15	14,75 0,20	9,15	$\frac{5,600}{570} = 5,26$	0,64	249 250 248 252	249,75	13,50 13,50 13,50 13,50	1145 1140 1140 1150	1144	2,90	0,22	1,19	0,37	0,42
9	38	13,80 13,80 13,70 13,80	13,78	9,69	14 11 17 13	13,75 0,19	10,06	$\frac{5,600}{543} = 5,52$	0,74	252 254 250 250	251,50	15,00 15,00 15,00 15,00	1200 1191 1190 1198	1195	3,34	0,22	1,32	0,37	0,42
10	39	14,75 14,80 14,60 14,75	14,73	10,36	19 15 18 20	18,00 0,24	10,78	$\frac{5,600}{519} = 5,78$	0,83	249 248 249 249	248,75	16,75 16,50 16,50 16,50	1245 1255 1250 1251	1250	3,81	0,22	1,48	0,36	0,41
11	40	15,80 15,75 15,70 15,90	15,79	11,10	20 22 21 19	20,50 0,28	11,56	$\frac{5,600}{498} = 6,02$	0,93	248 249 249 249	248,75	18,50 18,75 18,50 18,50	1307 1305 1303 1297	1303	4,43	0,21	1,65	0,34	0,41

Четвертая группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 7 дисковъ съ разстояніями въ 4^{м.}/м.

№ испытанія.	Нагнетаніе.		Всасываніе.		Полн. напоръ <i>H_{mtr.}</i>	Расходъ <i>Q₁ l. / sc.</i>	Полез. работа насоса <i>N_{ep}</i>	Вольты.		Амперы. <i>J</i>	Число оборот.		Полезная работа мотора <i>N_{em}</i>	Полный коэф. полез. дѣйств. насоса <i>η_p</i>	Механическія потери <i>N_r</i>	Гидравл. коэф. полез. дѣйствія насоса <i>η_{гп}</i>
	<i>p_m</i>	Среднее значеніе <i>p_m</i>	<i>h_d</i> <i>mtr.</i>	<i>p_v</i>				Среднее значеніе <i>p_v</i>	<i>h_s</i> <i>mtr.</i>		<i>E</i>	Среднее значеніе <i>E</i>				
1	4,50	4,53	3,18	18	16,00	3,58	7,54	0,36	249,50	8,50	828	1,42	0,25	0,42	0,36	
	4,50															
	4,60															
	4,50															
2	5,00	5,00	3,52	22	21,00	3,98	8,20	0,44	251,75	9,10	875	1,62	0,27	0,44	0,36	
	5,00															
	5,00															
	5,00															
3	5,25	5,24	3,69	31	26,25	4,23	8,73	0,49	251,00	9,80	909	1,82	0,27	0,43	0,36	
	5,20															
	5,25															
	5,25															
4	5,75	5,76	4,05	35	32,75	4,68	9,38	0,59	252,00	10,80	955	2,10	0,28	0,44	0,36	
	5,75															
	5,80															
	5,75															
5	6,75	6,64	4,67	47	46,50	5,48	10,56	0,77	249,75	13,40	1052	2,92	0,26	0,39	0,35	
	6,60															
	6,60															
	6,60															
6	7,20	7,13	5,01	56	54,25	5,93	9,39	0,74	249,25	14,75	1096	3,38	0,22	0,32	0,35	
	7,10															
	7,10															
	7,10															

8	7,60 7,70 7,80 7,80	7,73 5,43	60 62 62 66	62,50	0,85	6,46 = 11,72	1,01	250 249 250 250	249,75	16,50 16,50 16,50 16,40	1141 1146 1146 16,48 1145	1145	3,87	0,26	1,19	0,38	0,35
9	8,30 8,30 8,40 8,30	8,33 5,86	71 72 72 72	71,75	0,98	7,02 = 12,24	1,15	249 249 249 249	249,00	18,50 18,50 18,50 18,60	1197 1199 1196 18,53 1200	1198	4,51	0,25	1,33	0,36	0,35
10	9,00 9,00 9,00 9,00	9,00 6,33	76 78 81 82	79,25	1,08	7,59 = 13,04	1,32	248 248 248 248	248,00	21,00 21,00 21,00 21,00	1256 1260 1250 21,00 1250	1254	5,28	0,25	1,50	0,35	0,35
11	10,00 9,90 10,00 10,00	9,98 7,02	91 92 90 95	92,00	1,23	8,43 = 13,73	1,54	251 250 248 249	249,50	24,50 24,00 24,00 24,00	1327 1330 1324 24,13 1320	1325	6,20	0,25	1,72	0,34	0,34
11	4,50 4,50 4,30 4,50	4,45 3,13	33 35 38 37	35,75	0,49	3,80 = 6,90	0,35	249 248 250 248	248,75	8,25 8,20 8,00 8,10	821 831 824 8,14 826	826	1,30	0,27	0,55	0,47	0,37
2	4,80 4,80 4,80 4,80	4,80 3,37	45 42 48 42	44,25	0,60	4,15 = 7,44	0,41	252 252 252 249	251,25	8,40 8,45 8,50 8,40	869 872 870 8,44 873	871	1,38	0,30	0,62	0,54	0,37
3	5,20 5,20 5,20 5,25	5,21 3,66	52 52 55 52	52,75	0,72	4,56 = 7,91	0,48	251 251 251 250	250,75	9,00 9,10 9,00 9,00	912 909 910 9,03 909	910	1,53	0,31	0,69	0,57	0,37
4	5,60 5,60 5,70 5,60	5,63 3,96	65 65 64 67	65,25	0,89	5,03 = 8,51	0,57	250 250 250 250	250,00	10,00 10,00 9,80 10,00	949 954 950 9,95 956	952	1,82	0,31	0,76	0,54	0,37

Установка вентилей.	№ испытания.	Нагнетание.		Всасывание.		Поли. напор $H_{mtr.}$	Расход $Q_1 \text{ lt./sc.}$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Амперы. J	Число оброт. n		Полезная работа мотора насоса N_{em}	Полный коэф. полез. дейст. насоса η_p	Механические потери N_r	Гидравл. коэф. полез. действия насоса $\eta_{гидр}$			
		p_m	Среднее значение p_m	p_v	Среднее значение p_v						h_d	Среднее значение h_s					n	Среднее значение n	
II	6 15	6,60	6,63	85	87,25	6,03	$\frac{7.600}{437} = 9,61$	0,77	250	12,00	1041	1044	2,54	0,30	0,95	0,37			
		6,60		89													250	12,00	1048
		6,70		87													250	12,50	1047
		6,60		88													250	12,50	1039
"	7 16	7,00	7,14	98	98,75	6,54	$\frac{7.600}{413} = 10,17$	0,89	249	13,50	1091	1093	2,90	0,31	1,06	0,37			
		7,20		99													250	13,50	1095
		7,25		100													250	13,50	1089
		7,10		98													250	13,25	1095
"	8 17	7,70	7,63	113	112,50	7,07	$\frac{8.600}{448} = 10,71$	1,01	250	15,00	1136	1136	3,45	0,29	1,17	0,37			
		7,50		108													250	15,20	1131
		7,70		112													249	15,25	1141
		7,60		117													348	15,25	1137
"	9 18	8,00	8,15	123	126,50	7,63	$\frac{10.600}{530} = 11,32$	1,15	248	17,00	1188	1188	3,95	0,29	1,31	0,37			
		8,20		127													248	16,75	1188
		8,20		130													248	16,75	1189
		8,20		126													247	16,75	1186
"	10 19	9,00	8,95	145	144,25	8,43	$\frac{10.600}{497} = 12,07$	1,36	252	19,25	1248	1253	4,71	0,29	1,49	0,36			
		8,90		143													252	19,25	1260
		8,90		140													251	19,50	1251
		9,00		149													252	19,25	1251
"	11 20	9,50	9,50	159	160,25	9,04	$\frac{10.600}{475} = 12,63$	1,52	250	21,50	1302	1301	5,33	0,29	1,64	0,36			
		9,50		162													250	21,50	1301
		9,50		160													250	21,00	1303
		9,50		160													251	21,25	1299

III	0 2]	6,50 6,50 6,50 6,40	6,48	4,56	-30 -12 -18 -16	-19,00 — 0,26	4,48	$\frac{3.600}{617} = 2,92$	0,17	250 250 250 250	250,00	7,25 7,25 7,25 7,25	828 827 824 825	825	1,02	0,17	0,55	0,36	0,40
"	2 22	7,10 7,00 7,20 7,20	7,15	5,03	-18 -11 -11 -15	-13,75 — 0,19	5,02	$\frac{2.600}{567} = 3,17$	0,21	248 248 250 250	249,00	7,50 7,50 7,60 7,60	859 860 871 870	865	1,08	0,19	0,61	0,45	0,40
"	3 23	7,80 7,60 7,75 7,80	7,74	5,44	-16 -8 -10 -11	-11,25 — 0,15	5,47	$\frac{3.600}{505} = 3,56$	0,26	250 250 250 250	250,00	8,00 8,00 8,00 8,00	908 903 911 906	907	1,22	0,21	0,68	0,48	0,40
"	4 24	8,50 8,50 8,50 8,40	8,48	5,96	-13 -15 -14 -5	-11,75 — 0,16	5,98	$\frac{4.600}{611} = 3,93$	0,31	250 249 250 250	249,75	8,75 9,00 8,75 8,75	950 947 951 951	950	1,42	0,22	0,76	0,47	0,40
"	6 25	9,90 10,00 10,00 9,90	9,95	6,99	-10 -10 -11 -9	-10,00 — 0,14	7,03	$\frac{4.600}{543} = 4,42$	0,41	248 250 250 250	249,50	10,50 10,50 10,50 10,50	1043 1045 1046 1046	1045	1,97	0,21	0,95	0,40	0,40
"	7 26	10,75 10,75 10,60 10,70	10,70	7,52	-9 -8 -7 -8	-8,00 — 0,11	7,59	$\frac{4.600}{517} = 4,64$	0,47	249 249 249 249	249,00	11,50 11,50 11,50 11,50	1083 1088 1086 1086	1086	2,30	0,20	1,05	0,38	0,40
"	8 27	11,60 11,60 11,60 11,60	11,60	8,15	-8 -6 -7 -5	-6,50 — 0,09	8,24	$\frac{4.600}{491} = 4,89$	0,54	251 252 251 252	251,50	12,60 12,50 12,50 12,50	1140 1134 1140 1140	1139	2,57	0,21	1,18	0,39	0,40

Установка вентиляц.	Установка респиратора на кнопки.	№ испытания.	Нагнетание.		Всасывание.		Полн. напор. $H_{mtr.}$	Расходь насоса $Q_{1m.}/sc.$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора N_{em}	Подный коэф. полез. дѣят. насоса τ_p	Механич. потери N_r	Гидравл. коэф. полез. дѣятв. насоса τ_{hp}
			p_m	Среднее значение p_m	p_v	Среднее значение p_v				h_s	h_s	E	Среднее значение E	J	Среднее значение J				
III	9	28	12,60	-4			5,600	251	14,25	1187	3,03	0,20	1,31	0,36	0,40				
			12,60	0			582	252	14,00	1187									
			12,50	-9				252	14,00	1193									
			12,65	-6	-4,75	-0,06	8,98	252	13,75	14,00	1195	3,03	0,20	1,31	0,36	0,40			
"	10	29	13,90	-4			5,600	251	15,50	1250									
			13,80	0			553	252	15,50	1244									
			13,80	-1				252	15,50	1245									
			13,80	+1	-1,00	-0,01	9,89	252	15,50	15,50	1239	3,48	0,20	1,47	0,35	0,40			
"	11	30	14,75	-2			5,600	250	17,00	1299									
			14,75	+3			531	250	16,80	1286									
			14,75	-1				250	16,80	1291									
			14,75	0	0,00	0,00	10,55	250	16,75	16,84	1297	3,89	0,20	1,62	0,35	0,40			
IV	0	31	6,50	-10			3,600	252	7,50	832									
			6,30	-9			560	251	7,40	826									
			6,30	0				250	7,60	830									
			6,40	-5	-6,00	-0,08	4,57	250	7,50	7,50	830	1,10	0,18	0,56	0,37	0,41			
"	2	32	7,00	-6			3,600	250	7,80	866									
			7,00	-8			484	250	7,80	867									
			6,80	-6				250	7,80	868									
			6,90	+1	-4,75	-0,06	4,99	250	7,80	7,80	872	1,15	0,22	0,62	0,47	0,41			
"	3	33	7,80	0			5,600	252	8,40	922									
			7,70	0			727	251	8,40	916									
			7,60	+1				250	8,40	916									
			7,60	+2	+0,75	+0,01	5,59	250	8,40	8,40	918	1,33	0,23	0,70	0,49	0,41			

4	34	8,30 8,30 8,40 8,40	8,35	5,87	+2	+2,75	0,04	6,09	$\frac{4,600}{548}$	0,36	250 250 250 250	250,00	9,00 9,00 9,00 9,00	955 956 962 957	958	1,49	0,24	0,77	0,50	0,41
6	35	9,75 9,80 9,80 9,80	9,79	6,88	10	9,50	0,13	7,19	$\frac{4,600}{490}$	0,47	249 249 249 249	249,00	10,75 10,75 10,75 10,75	1050 1047 1050 1046	1048	2,03	0,23	0,96	0,44	0,40
7	36	10,50 10,50 10,50 10,60	10,53	7,40	13	13,00	0,18	7,76	$\frac{5,600}{580}$	0,53	250 249 249 249	249,25	11,75 11,75 11,75 11,75	1094 1094 1097 1099	1096	2,34	0,23	1,07	0,42	0,40
8	37	11,25 11,20 11,30 11,40	11,29	7,94	15	15,75	0,21	8,33	$\frac{5,600}{552}$	0,60	249 249 250 250	249,50	12,80 13,20 13,00 13,00	1142 1144 1147 1141	1144	2,74	0,22	1,19	0,39	0,40
9	38	12,25 12,25 12,20 12,30	12,25	8,61	20	21,00	0,29	9,08	$\frac{5,600}{525}$	0,69	249 249 251 250	249,75	14,60 14,50 14,50 14,50	1197 1198 1201 1192	1197	3,20	0,22	1,33	0,37	0,40
10	39	13,60 13,50 13,40 13,50	13,50	9,49	26	24,00	0,33	10,00	$\frac{5,600}{498}$	0,80	250 252 252 253	251,75	16,20 16,50 15,75 16,00	1255 1255 1245 1258	1253	3,68	0,22	1,49	0,37	0,40
11	40	14,60 14,60 14,60 14,60	14,60	10,26	30	29,50	0,40	10,84	$\frac{5,600}{476}$	0,91	248 248 248 248	248,00	17,25 17,75 17,75 17,75	1305 1297 1302 1305	1302	4,15	0,22	1,65	0,36	0,40

Замѣченныя опечатки.

Страница.	Строка		Напечатано:	Должно быть:
	сверху	снизу		
5	5	—	X_x, Y_y, Z_z	X_n, Y_n, Z_n
„	—	6	(5, a)	(5, a)
„	—	9	(4, a)	(4, a)
10	3	—	U	u
„	5	—	U	u
11	—	3	(17, b)	(17, b)
„	—	5	(17, b)	(17, b)
20	—	15	Въ случаѣ....	13. Въ случаѣ....
23	—	12	$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$	$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$
24	3	—	$\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial z}$
„	17	—	(45)	(46)
„	—	3	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$
29	—	2	θ	θ
„	—	4	θ	θ
„	—	6	θ	θ
32	—	6	$d \frac{\omega_1}{dt}$	$d \frac{\omega_1}{dt}$
34	18	—	вихривой	вихревой
37	—	2	VII	VI
46	—	6	Имѣя зависимости...	31. Имѣя зависимости...
50	—	4	...и расширенія; и...	...и расширенія и...
51	—	9	$N_y \lambda = -p + (a + b + c) + 2\mu b,$	$N_y = -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu b,$
58	5	—	...нормами...	...нормали...
„	—	11	$cs(n, z)$	$cs(n, z)$
64	9	—	$\dots \Big] ^2 + 2p_1^2 + \dots$	$\dots \Big] ^2 + 2p_1^2 + \dots$

Страница.	Строка.		Напечатано:	Должно быть:
	сверху.	снизу.		
64	—	6	N_a	N_x
91	—	12	границахъ.	границахъ.
„	17	—	...капиллярныя...	...капиллярныя...
103	12	—	τ_{in}	τ_{ih}
106	—	12	...между парой парой плоскостей...	...между парой плоскостей...
107	1	—	...жидкость благодаря...	...жидкость, благодаря...
„	2	—	...о плоскости будетъ...	...о плоскости, будетъ..
„	—	2	изъ	изъ
109	10	—	$\nu_1(\omega r - w_t) \Big _{z=+h} = \dots$	$\nu_1(\omega r - w_t) \Big _{z=-h} = \dots$
110	—	1	$= \lambda \frac{kr^2 a'_2 + 2a_0 a_1'}{\dots}$	$= \lambda \frac{kr^2 a'_3 + 2a_0 a_1'}{\dots}$
111	5	—	Въ форм. (197) стоять: a_1 и a_3	a_1' и a_3'
112	—	5	...скоростью wскоростью ω .
116	14	—	τ_1	γ
„	—	18	...трѣнія...	...трения...
118	—	14	... дялдля...
120	—	17	$[\mu]$	$[\gamma]$
„	—	19	... трѣнія μ ...	трения γ .
123	—	8	турбулентнымъ..	турбулентнымъ.
„	19	—	...при...	...при...
125	12	—	...для...	...для...
129	—	5	... = U_2' = U_2' = ...
„	—	13	... — $U_4' +$ — $U_2' +$...

150

Цѣна 3 рубля.

Изданія Механическаго Кружка
при Кіевскомъ Политехническомъ Институтѣ.
